

**ИЗЫСКАНИЕ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ,
СТРОИТЕЛЬСТВО И МОНТАЖ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ**

УДК 539.3

**ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ
ПЛАСТИН, ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПО ПЕРИМЕТРУ ИЛИ
ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО ДВУМ СМЕЖНЫМ СТОРОНАМ**

© 2020 А.С. Кравчук*, А.И. Кравчук**, С.А. Томилини***, С.Ф. Годунов***

**Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*

***Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

****Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Волгодонск, Ростовская обл., Россия*

Все возрастающие требования к безопасности объектов ядерной энергетики выдвигают требования по совершенствованию методов расчета элементов инженерных конструкций и энергетического оборудования на прочность и жесткость. Впервые теория чистого изгиба прямоугольных пластин, шарнирно опертых в угловых точках, обобщена на случай их изгиба как при шарнирном опирании пластин по периметру, так и защемлении прямоугольной пластины по двум смежным сторонам. Следует отметить, что полученная система уравнений равновесия не позволяет удовлетворить уравнения равновесия точно, а только в смысле среднего интегрального значения. Однако авторам представляется этот метод решения задачи прогиба гораздо более математически и физически обоснованным по сравнению с использованием гипотез Кирхгофа, которые приводят к противоречиям, когда нулевые перерезывающие силы предполагаются ненулевыми, только для того, чтобы получить уравнение равновесия. Предлагаемый подход позволяет оценить прогибы пластины в случае, когда главный вектор сил, приложенных к пластине, можно приложить к ее геометрическому центру. В статье указаны условия на распределение поперечной нагрузки, при которых можно считать, что главный вектор сил можно приложить к геометрическому центру пластины. В качестве примеров решены задачи прогиба прямоугольной пластины под собственным весом как при шарнирном опирании по периметру, так и при защемлении по двум смежным сторонам.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, чистый изгиб, распределенная нагрузка, техническая теория изгиба, напряженно-деформированное состояние, жесткость.

Поступила в редакцию 25.10.2019

После доработки 23.03.2020

Принята к публикации 27.03.2020

Введение

Одним из главных вопросов при проектировании и строительстве объектов ядерной энергетики является обеспечение их безопасности. Решение этого вопроса во многом определяется прочностью и жесткостью конструкций, как основного и вспомогательного оборудования, так и сооружений. Прочность и жесткость – главные свойства любой конструкции, обеспечивающие ее нормальное функционирование, а также безопасность путем сохранения не только целостности, но, во многих случаях, и геометрической формы. Качество решения задач, с помощью которых вычисляется напряженно-деформированное состояние и жесткость элементов, как строительных конструкций, так и оборудования ядерных энергетических установок напрямую определяет безопасность и надежность эксплуатации АЭС и других объектов ядерной энергетики в целом. Все возрастающие требования к безопасности объектов ядерной

энергетики выдвигают требования по совершенствованию методов расчета элементов инженерных конструкций и энергетического оборудования.

Одним из распространенных видов нагружения тонкостенных элементов конструкций в энергетическом строительстве и машиностроении является изгиб. Рассматриваемое направление в механике имеет огромное практическое значение [1-3]. Множество работ посвящено решению задачи изгиба конструкций вообще [4, 5] и, в частности, пластин [6-9]. Однако следует отметить, что до настоящего времени не было создано непротиворечивой теории изгиба прямоугольных пластин, шарнирно закрепленных по периметру поперечной нагрузкой. Известные теории, которые до настоящего времени считаются «классическими», при ближайшем рассмотрении являются некорректными с математической и физической точек зрения [10]. В основном они основаны на гипотезах Кирхгофа, и при составлении уравнений равновесия в ряде этих теорий нулевые по исходным предположениям перерезывающие силы (равные произведению ненулевого модуля сдвига на интеграл от нулевого значения сдвига по постановке задачи), буквально через страницу уже предполагаются ненулевыми с тем обоснованием, что «иначе уравнение изгиба вывести не получится» [10, 11].

Это излагается во всех учебниках по теории упругости, где затрагивается тема изгиба пластин. Отметим, что еще со времен Тимошенко С.П. делались попытки несколько смягчить предположение об отсутствии сдвигов, для того, чтобы перерезывающие силы стали ненулевыми. Однако это приводит к тому, что из-за свойства парности касательных напряжений на поверхности пластины при подобном подходе действуют не только нормальные к поверхности пластины нагрузки, но и касательные напряжения, что также напрямую противоречит исходной постановке задачи.

Авторам данной статьи представляется более перспективным обобщить известную теории чистого изгиба пластин, сформулированную С.П. Тимошенко [12]. Обобщение состоит в том, что при составлении уравнений равновесия будет использоваться среднеинтегральные значения главных кривизн изогнутой пластины.

Хотя предлагаемая методика также не позволяет математически точно решить поставленную задачу, однако она, тем не менее, хотя бы позволяет без математических и физических противоречий оценить прогибы пластины по величине главного вектора сил, приложенных к пластине. Эта оценка справедлива, если главный вектор сил приложен в центре пластины. Для установления этого факта авторами предложено определять раздельно эквивалентные изгибающие моменты от распределенной нагрузки на каждой из половин пластины. Если эквивалентные моменты на каждом из краев совпадают, то можно считать, что главный вектор сил приложен к центру пластины.

Основные гипотезы, используемые в модели чистого изгиба прямоугольной пластины постоянной толщины

При построении обобщенной технической теории чистого изгиба прямоугольную пластину постоянной толщины можно разделить на элементарные слои (рис. 1). Будем предполагать, что продольные слои в пластине не взаимодействуют в поперечном направлении.

Главные моменты, приложенные к краям пластины обозначим через M_x и M_y . Они действуют в плоскостях xOz и yOz соответственно. Интенсивности главных моментов M_x/a и M_y/b – величины постоянные и равномерно распределенные по соответствующим сторонам пластины.

Пусть пластина имеет ширину a (вдоль направления Ox), длину b (вдоль направления Oy), а также постоянную высоту h . Это значит, что при нагруженных моментами постоянной интенсивности отклонения в высоте поперечного сечения малы по сравнению с радиусами кривизны пластины и не вносят существенную поправку в определение его напряженно-деформированного состояния. Будем предполагать, что у прямоугольной пластины постоянной толщины при чистом изгибе существует нейтральный слой – слой, длина которого не изменяется при изгибе. Предполагается, что пластину можно условно разделить на слои с постоянной толщиной λ (рис. 1).

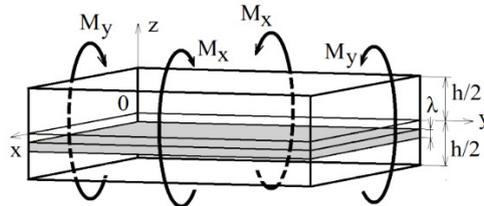


Рисунок 1 – Чистый изгиб прямоугольной пластины постоянной толщины [Pure bending of a rectangular plate of constant thickness]

Следуя монографии С.П. Тимошенко [12], исходя из очевидных рассуждений о геометрическом подобии продольных размеров элементарных слоев размерам нейтрального слоя, можно установить, что нормальные деформации элементарного слоя ϵ_x , ϵ_y относительно геометрического положения нейтрального слоя распределены следующим образом [12] (1):

$$\epsilon_x = \frac{z - \delta}{\rho_x}, \quad \epsilon_y = \frac{z - \delta}{\rho_y}, \quad (1)$$

где δ – координата нейтрального слоя относительно геометрической середины пластины; ρ_x, ρ_y – радиусы кривизны нейтрального слоя в плоскостях xOz и yOz соответственно.

Учитывая, что пластина изгибается приложенными по прямоугольным краям моментами с постоянной интенсивностью и действующими во взаимно перпендикулярных плоскостях xOz и yOz , для плоского напряженного состояния (т.е. $\sigma_z = 0$) можно получить, с учетом гипотез о полном отсутствии сдвигов ($\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), следующие уравнения для нормальных напряжений σ_x, σ_y [12, 13]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x),$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Очевидно, что с учетом (1) для однородного линейно-упругого материала можно записать (2):

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_y} \right) \cdot (z - \delta), \quad (2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_x} \right) \cdot (z - \delta).$$

Исходя из того, что касательные напряжения по нашему предположению отсутствуют, нам необходимо удовлетворить четыре уравнения равновесия [12] (3):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \sigma_x dy dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a \sigma_y dx dz = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b (\sigma_x \cdot z) dy dz = M_x, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a (\sigma_y \cdot z) dx dz = M_y.$$

Уравнения обобщенной теории чистого изгиба

Будем предполагать, что параметры σ_x , σ_y , ε_x , ε_y , ρ_x , ρ_y , являются функциями от двух координат x и y , для которых выполнены следующие уравнения:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{z - \delta}{\rho_x(x, y)}, \quad \varepsilon_y(x, y) = \frac{z - \delta}{\rho_y(x, y)},$$

где в дальнейшем будем обозначать $\rho_x(x, y)^{-1} = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$, $\rho_y(x, y)^{-1} = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$, а

$w(x, y)$ – прогибы пластины.

Тогда, исходя из закона Гука для плоского напряженного состояния (4):

$$\sigma_x(x, y) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \cdot (z - \delta), \quad (4)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \cdot (z - \delta).$$

Тогда уравнения равновесия для главных моментов M_x , M_y примут вид (5):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \sigma_x(x, y) dy dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a \sigma_y(x, y) dx dz = 0, \quad (5)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b (\sigma_x(x,y) \cdot z) dy dz = M_x, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a (\sigma_y(x,y) \cdot z) dx dz = M_y.$$

Подставляем (4) в (5) и получаем (6):

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) dy \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - \delta) dz = 0,$$

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right) dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - \delta) dz = 0,$$
(6)

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) dy \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - \delta) \cdot z dz = M_x \frac{1 - \nu^2}{E},$$

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right) dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - \delta) \cdot z dz = M_y \frac{1 - \nu^2}{E}.$$

Очевидно, что первые два уравнения системы (6) удовлетворяются автоматически при $\delta = 0$. Отметим, что последние два уравнения системы (6) разрешимы только когда $\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}$ являются константами.

Однако систему из этих уравнений можно разрешить в смысле среднеинтегральных значений $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} dy dx$ и $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} dy dx$. Проинтегрируем первое уравнение на интервале $[0, a]$ по x , а второе уравнение на интервале $[0, b]$ по y . В результате получим (7):

$$\left(\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} dy dx + \nu \cdot \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} dy dx \right) = 12 \cdot \frac{a}{h^3} \cdot M_x \frac{1 - \nu^2}{E},$$

$$\left(\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} dx dy + \nu \cdot \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} dx dy \right) = 12 \cdot \frac{b}{h^3} \cdot M_y \frac{1 - \nu^2}{E}.$$
(7)

Систему уравнений (7) будем называть уравнениями равновесия обобщенной теории чистого изгиба (т.е. теории в смысле среднеинтегральных значений).

Безусловно, система уравнений (7) не позволяет точно удовлетворить уравнения равновесия, а только в смысле среднего интегрального значения, но авторам

представляется этот метод решения задачи прогиба гораздо более математически и физически обоснованным по сравнению с использованием гипотез Кирхгофа [14], которые приводят к противоречиям, когда нулевые перерезывающие силы предполагаются ненулевыми [10] только для того чтобы получить уравнение равновесия.

Решая (7), можно получить (8):

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} dy dx = 12 \cdot \frac{ab}{E \cdot h^3} \left(\frac{M_x}{b} - \nu \cdot \frac{M_y}{a} \right), \quad (8)$$

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} dy dx = 12 \cdot \frac{ab}{E \cdot h^3} \left(\frac{M_y}{b} - \nu \cdot \frac{M_x}{a} \right).$$

Обобщенный чистый изгиб вязкоупругой пластины в случае шарнирно закрепленных сторон

Система уравнений (8) позволяет поставить и решить задачу чистого изгиба также для пластин, шарнирно закрепленных по периметру.

Пусть $w(x, y)$ будет иметь вид (9):

$$w(x, y) = C \cdot x \cdot (x - a) \cdot y \cdot (y - b). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), можно получить два уравнения для определения константы C (10):

$$C = -\frac{36}{E \cdot h^3 \cdot b^2} \left(\frac{M_x}{b} - \nu \frac{M_y}{a} \right), \quad (10)$$

$$C = -\frac{36}{E \cdot h^3 \cdot a^2} \left(\frac{M_y}{a} - \nu \frac{M_x}{b} \right).$$

Из этой системы следует, что в случае шарнирного опирания пластины по сторонам (9) главные моменты, действующие на сторонах, должны быть связаны уравнением:

$$\frac{a^2 + \nu \cdot b^2}{a^2 \cdot b^3} M_x = \frac{b^2 + \nu \cdot a^2}{a^3 \cdot b^2} M_y.$$

Таким образом, для того, чтобы шарнирно опертая пластина находилась в состоянии обобщенного чистого изгиба в смысле уравнений (8) достаточно, чтобы эквивалентные моменты, приложенные по сторонам, находились в отношении (11):

$$M_x = \frac{b^2 + \nu \cdot a^2}{a^2 + \nu \cdot b^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot M_y. \quad (11)$$

Замена поперечной распределенной нагрузки эквивалентными моментами

Пусть поперек пластины, шарнирно закрепленной по сторонам на ее верхней поверхности, действует внешняя распределенная нагрузка с интенсивностью

$q(x, y) < 0$. Будем предполагать, что нагрузка распределена по участку S поверхности пластины $q(x, y) \neq 0$ при $(x, y) \in S$ и $q(x, y) = 0$ при $(x, y) \in [0, a] \times [0, b] \setminus S$ (т.е. (x, y) принадлежит дополнению S до прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$, занятого пластиной). Будем предполагать, что выполнены два условия симметрии, создаваемых нагрузкой $q(x, y)$ моментов относительно середины пластины (12):

$$\int_0^{a/2} \int_0^b q(x, y) \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) dx dy = - \int_{a/2}^a \int_0^b q(x, y) \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) dx dy,$$

$$\int_0^a \int_0^{b/2} q(x, y) \cdot \left(y - \frac{b}{2}\right) dx dy = - \int_0^a \int_{b/2}^b q(x, y) \cdot \left(y - \frac{b}{2}\right) dx dy.$$
(12)

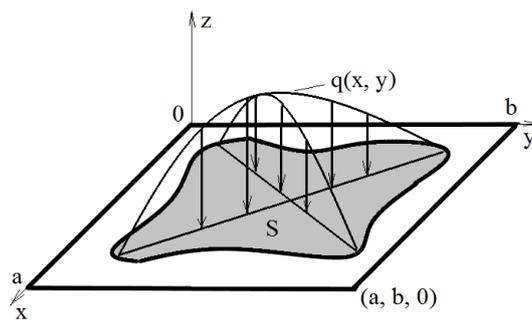


Рисунок 2 – Действие распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$ на поверхность пластины
 [The effect of distributed lateral load $q(x, y)$ on the plate surface]

Будем считать, что при выполнении условий (12) главный вектор сил величиной Q (от действующей поперечной нагрузки $q(x, y)$) может быть приложен в центре пластины. Соответственно предполагается, что интенсивность вертикальной реакции при опоре по периметру равна $Q/(2 \cdot (a + b))$.

Предполагая, что моменты, действующие в плоскостях xOz и yOz , равноправны (т.е. каждый компенсирует половину величины главного вектора сил), то должно выполняться уравнение равновесия:

$$Q = 2 \cdot \frac{M_y}{a} + 2 \cdot \frac{M_x}{b}.$$

С учетом (11) можно получить (13):

$$Q = 2 \cdot (1 + \nu) \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + \nu \cdot b^2} \right) \cdot \frac{M_y}{a}.$$
(13)

Складывая два уравнения (10), используя равенства (11) и (13), можно получить:

$$C = - \frac{18}{E \cdot h^3} \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)} \frac{Q}{(a^2 + b^2)}.$$

Таким образом, окончательно изгиб прямоугольной пластины, находящейся в состоянии чистого изгиба, любой распределенной нагрузкой с главным вектором сил величиной Q , приложенным в центре пластины и направленным вертикально вниз, можно определить как:

$$w(x, y) = -\frac{18}{E \cdot h^3} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{Q}{(a^2 + b^2)} \cdot x \cdot (x-a) \cdot y \cdot (y-b).$$

Так, например, прогиб прямоугольной пластины под действием собственного веса составляет:

$$w(x, y) = -\frac{18}{E \cdot h^2} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{a \cdot b}{(a^2 + b^2)} g \cdot \rho \cdot x \cdot (x-a) \cdot y \cdot (y-b).$$

Обобщенный чистый изгиб прямоугольной пластины, защемленной по двум соседним сторонам

Пусть, как и ранее, главный вектор Q сил распределенной нагрузки приложен к центру прямоугольной пластины размерами $a \times b$. В этом случае предполагается, что интенсивность вертикальной реакции при опоре по двум смежным сторонам равна $Q/(a+b)$.

Перемещения пластины можно представить в виде:

$$w(x, y) = -\frac{18}{E \cdot h^3} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{Q}{(a^2 + b^2)} \cdot x^2 \cdot y^2.$$

Провисание же защемленной по двум сторонам пластины под собственным весом можно определить как:

$$w(x, y) = -\frac{18}{E \cdot h^2} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{a \cdot b}{(a^2 + b^2)} \cdot g \cdot \rho \cdot x^2 \cdot y^2.$$

Результаты и выводы

Впервые предложено обобщение решения задачи чистого изгиба пластины, закрепленной в угловых точках на случай прямоугольной пластины, шарнирно опертой по периметру.

С помощью предлагаемой методики впервые решена задача изгиба распределенной нагрузкой пластины, защемленной по двум смежным сторонами.

В качестве примеров решены задачи прогиба прямоугольной пластины под собственным весом, как при шарнирном опирании по периметру, так и при защемлении по двум смежным сторонам.

Применение предлагаемой методики обеспечивает повышение качества расчета напряженно-деформированного состояния и жесткости элементов строительных конструкций и оборудования объектов ядерной энергетики, что напрямую определяет их безопасность и надежность эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
2. *Бидерман, В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика / В. Л. Бидерман. – Москва : Машиностроение, 1977. – 488 с.

3. *Кравчук, А. С.* К вопросу об обоснованной форме наследственной вязкоупругости с одним ядром ползучести / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Глобальная ядерная безопасность. – 2019. – № 4 (33). – С. 37-42.
4. *Овчинников Н. А.* Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния элементов поперечных силовых сечений кузова автобуса в эксплуатации / Н. А. Овчинников // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 2. – URL : <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1614> (дата обращения: 01.11.2019).
5. *Фурсов, В. В.* Сравнительный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований натурной арки из клееной древесины / В. В. Фурсов, М. Пурызданхах, А. Н. Бидаков // Инженерный вестник Дона. – 2014. – № 2. – URL : <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2395> (дата обращения: 01.11.2019)
6. *Горшков, А. Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
7. Shen H.S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells. – CRC Press, 2009. – 280 p.
8. Rahbar-Ranji A., Bahmyari E. Bending Analysis of Thin Plates with Variable Thickness Resting on Elastic Foundation by Element Free Galerkin Method. Journal of Mechanics, 2012, V. 28, Issue 3. P. 479-488. DOI: <https://doi.org/10.1017/jmech.2012.57>.
9. *Кравчук, А. С.* Чистый изгиб наследственно вязкоупругопластических прямоугольных пластин / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, С. А. Томилин, С. Ф. Годунов // Инженерный вестник Дона. – 2019. – № 9. – URL : [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6170](http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6170) (дата обращения: 01.11.2019)
10. *Ермоленко, А. В.* Расчет круглых пластин по уточненным теориям / А. В. Ермоленко // Вестник Сыктывкарского университета. – Сер. 1. – Вып. 6. – 2006. – С. 79-86.
11. *Саченков, А. А.* Цикл лекций по теории изгиба пластин. – Казань : КФУ, 2012. – 54 с. – URL : https://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/21525/05_37_2012_000045.pdf (дата обращения: 10.10.2019)
12. *Тимошенко, С. П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Наука, 1966. – 636 с.
13. *Жемочкин, Б. Н.* Теория упругости / Б. Н. Жемочкин. – Москва : Гостройиздат, 1957. – 257 с.
14. *Журавков, М. А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 543 с.

REFERENCES

- [1] Volmir A.S. Gibkie plastinki i obolochki [Flexible Plates and Shells]. Moskva: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury` [Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature]. 1956. 419 p.
- [2] Biderman V.L. Mexanika tonkostenny`x konstrukcij. Statika [Mechanics of Thin-Walled Structures. Statika]. Moskva: Mashinostroenie [Moscow: Mashinostroenie]. 1977. 488 p.
- [3] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. K voprosu ob obosnovannoj forme nasledstvennoj vyazkoupругosti s odnim yadrom polzuchesti [The issue of Reasonable Form of Hereditary Viscoelasticity with Single Creep Core]. Global'naya yadernaya bezopasnost' [Global Nuclear Safety]. 2019. N4(33). P. 37-42.
- [4] Ovchinnikov N.A. Konechno-e`lementny`j analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya e`lementov poperechny`x silovy`x sechenij kuzova avtobusa v e`kspluatcii [Finite Element Analysis of the Stress-Strain State of Elements of Cross-Sections of the Bus Body in Operation]. Inzhenerny`j vestnik Dona [Engineering Bulletin of Don]. 2013. N2. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1614> (01.11.2019).
- [5] Fursov V.V., Puryzdanhakh M., Bidakov A.N. Sravnitel`ny`j analiz rezul'tatov teoreticheskix i e`ksperimental`ny`x issledovaniy naturnoj arki iz kleenoy drevesiny` [Comparative Analysis of the Results of Theoretical and Experimental Studies of Natural Arches Made of Glued Wood]. Inzhenerny`j vestnik Dona [Don engineering Bulletin]. 2014. N2. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2395> (01.11.2019).
- [6] Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Mexanika sloisty`x vyazkoupругoplasticheskix e`lementov konstrukcij [Mechanics of Layered Viscoelastic Structural Elements]. Moskva: FIZMATLIT [Moscow: FIZMATLIT]. 2005. 576 p.
- [7] Shen H.S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press. 2009. 280 p.
- [8] Rahbar-Ranji A., Bahmyari E. Analysis of Thin Plates with Variable Thickness Resting on Elastic Foundation by Element Free Galerkin Method [Bending Analysis of Thin Plates with Variable Thickness Resting on Elastic Foundation by Element Free Galerkin Method]. Journal of Mechanics

- [Journal of Mechanics]. 2012. V. 28. Issue 3. P. 479-488. DOI: <https://doi.org/10.1017/jmech.2012.57>.
- [9] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tomilin S.A., Godunov S.F. Chisty`j izgib nasledstvenno vyazkouprugoplasticheskix pryamougol`ny`x plastin [Pure Bending of Inherently Viscoelastic Rectangular Plates]. *Inzhenerny`j vestnik Dona [Don Engineering Bulletin]*. 2019. N9. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6170 (01.11.2019).
- [10] Ermolenko A.V. Raschet krugly`x plastin po utochnenny`m teoriyam [Calculation of Round Plates Based on Refined Theories]. *Vestnik Sy`kty`vkarskogo universiteta [Bulletin of Syktyvkar University]*. Ser. 1. Issue 6. 2006. P. 79-86.
- [11] Sachenkov A.A. Cikl lekcij po teorii izgiba plastin [Lectures on the Theory of Plate Bending]. – Kazan': KFU [Kazan: KFU]. 2012. 54 p. URL: https://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/21525/05_37_2012_000045.pdf (10.10.2019).
- [12] Timoshenko S.P., Voynovsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki [Plates and Shells]*. Moskva: Nauka [Moscow: Nauka]. 1966. 636 p.
- [13] Zhemochkin B.N. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva: Gostroizdat [Moscow: Gostroizdat]. 1957. 257 p.
- [14] Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mexanika sploshny`x sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Mechanics of Continuous Media. Theory of Elasticity and Plasticity]*. Minsk: BGU [Minsk: BSU]. 2011. 543 p.

Technical Theory of Bending of Elastic Rectangular Plate Pivotaly Supported on the Perimeter or Pinched Along Two Adjacent Sides

A.S. Kravchuk^{*1}, A.I. Kravchuk^{**2}, S.A. Tomilin^{***3}, S.F. Godunov^{***}

**Polytechnic Research Institute, a branch of the Belarusian National Technical University, Independence Avenue, 65, Minsk, Republic of Belarus 220013*

***Belarusian State University, Independence Avenue, 4, Minsk, Republic of Belarus 220030*

****Volgodonsk Engineering Technical Institute the branch of National Research Nuclear University «MEPhI», Lenin St., 73/94, Volgodonsk, Rostov region, Russia 347360*

¹ORCID iD: 0000-0002-4730-7769

Wos Researher ID: AAB-7774-2019

e-mail: ask_belarus@inbox.ru

²ORCID iD: 0000-0002-6105-4200

Wos Researher ID: AAB-7880-2019

e-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

³ORCID iD: 0000-0001-8661-8386

Wos Researher ID: G-3465-2017

e-mail: SATomilin@mephi.ru

Abstract – There is a need to improve methods for calculating elements of engineering structures and equipment for strength and stiffness, which directly affects the safety of nuclear power facilities. For the first time the theory of pure bending of rectangular plates pivotaly supported at corner points is generalized to the case of their bending both when the plates are hinged around the perimeter and when a rectangular plate is pinched on two adjacent sides. It should be noted that the obtained system of equilibrium equations does not allow satisfying the equilibrium equations exactly, but only in the sense of the average integral value. However, the authors think this method of solving the deflection problem is much more mathematically and physically justified in comparison with the use of Kirchhoff hypotheses, which lead to contradictions when zero shear forces are assumed to be nonzero, only in order to obtain a deliberately equilibrium equation. The proposed approach allows us to evaluate the deflection of the plate in the case when the main vector of forces applied to the plate can be applied to its geometric center. The article indicates the conditions for the distribution of the transverse load under which it can be assumed that the main vector of forces can be applied to the geometric center of the plate. As examples, the problems of deflection of a rectangular plate under its own weight have been solved both when hinged around the perimeter and when pinched on two adjacent sides.

Keywords: rectangular plate, pure bending, distributed load, technical theory of bending, stress-strain state, stiffness.