
ЯДЕРНАЯ, РАДИАЦИОННАЯ И
ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ
NUCLEAR, RADIATION AND
ENVIRONMENTAL SAFETY

УДК 621.37: 534.321.9

<https://doi.org/10.26583/gns-2024-03-01>

EDN CUHJST

Оригинальная статья / Original paper



Особенности прохождения анизотропного
ультразвукового излучения в глубоководных морских акваториях

А.П. Елохин , С.Е. Улин , А.Е. Шустов , Н.М. Свешников

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация

 elokhin@yandex.ru

Аннотация. В рамках работ, посвященных оценкам радиоактивного загрязнения донной поверхности глубоководных морских акваторий, необходимо решить проблему передачи оператору информации, полученной подводным дозиметрическим комплексом. Использование стандартного радиоканала в таких условиях невозможно, поэтому целесообразно использовать ультразвуковой канал передачи информации. В связи с чем и рассматривается вопрос прохождения ультразвукового анизотропного излучения в глубоководной морской акватории. Анизотропность излучения необходима для уменьшения погрешности и повышения надежности передачи информации. С этой целью формулируется краевая задача по оценке давления ультразвука на водную среду и приводится ее решение в виде волнового уравнения в морской воде. Уделяется внимание таким характеристикам морских акваторий, как соленость воды, давление столба жидкости, определяющего ее плотность, температуру, дальность распространения излучения с учетом его частотных характеристик. Решение задачи осуществляется известным методом разделения переменных в сферической геометрии с учетом анизотропии излучения, заданные характеристики которого определялись на основе оптимального выбора направления излучения на ультразвуковое буферное устройство, располагающееся на водной поверхности акватории, определяемого экспериментально. Результаты расчета показали, что при частоте излучения 1 кГц детектор надежно регистрирует сигнал на расстоянии ~ 1 км. С ростом частоты сигнал заметно поглощается и при частоте излучения ~ 40 кГц начинает резко падать с расстояния ~ 20 м. Аналогичные результаты были получены и при решении задачи в виде излучения широкого пучка. Результаты решения задач, позволяют сформулировать определенные требования к конструкции ультразвуковых детекторов, используемых для подводной передачи информации, что позволит реализовать метод передачи информации из глубоководных акваторий при использовании подводного дозиметрического комплекса и, кроме того, разработать звуковой способ связи в условиях глубоководных акваторий, что сыграет значительную роль при решении проблем передачи информации в этих специфических условиях.

Ключевые слова: морские акватории, подводный дозиметрический комплекс, буферное устройство, свойства ультразвука, соленость морской воды, частота излучения, краевые задачи, сферическая геометрия.

Для цитирования: Елохин А.П., Улин С.Е., Шустов А.Е., Свешников Н.М. Особенности прохождения анизотропного ультразвукового излучения в глубоководных морских акваториях. *Глобальная ядерная безопасность*. 2024;14(3):6–26. <https://doi.org/10.26583/gns-2024-03-01>

For citation: Elokhin A.P., Ulin S.E., Shustov A.E., Sveshnikov N.M. Peculiarities of anisotropic ultrasonic transmission passage in deep sea water areas. *Global nuclear safety*. 2024;14(3):6–26 (In Russ.). <https://doi.org/10.26583/gns-2024-03-01>

Peculiarities of anisotropic ultrasonic transmission passage in deep sea water areas

Alexander P. Elokhin , Sergey E. Ulin , Alexander E. Shustov ,
Nikita M. Sveshnikov

National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russian Federation
 elokhin@yandex.ru

Abstract. It is necessary to solve the problem of transmitting to the operator the information received by the underwater dosimetric complex within the framework of the works devoted to estimations of radioactive contamination of the bottom surface of deep sea areas. The use of standard radio channel in such conditions is impossible, therefore it is expedient to use ultrasonic channel of information transmission. Thus, the issue of ultrasonic anisotropic radiation transmission in deep sea water area is considered. Anisotropy of radiation is necessary to reduce the error and increase the reliability of information transmission. A boundary value problem to estimate the ultrasound pressure on the aquatic medium is formulated and its solution in the form of a wave equation in seawater is given. Attention is paid to such characteristics of sea water areas as water salinity, liquid column pressure determining its density, temperature, range of radiation propagation taking into account its frequency characteristics. The problem is solved by the known method of separation of variables in spherical geometry taking into account the anisotropy of radiation, the given characteristics of which are determined on the basis of the optimal choice of the radiation direction to the ultrasonic buffer device located on the water surface of the water area, determined experimentally. The calculation results show that at the radiation frequency of 1 kHz the detector reliably registers the signal at a distance of ~ 1 km. As the frequency increases, the signal is noticeably absorbed and at a radiation frequency of ~ 40 kHz begins to fall sharply from a distance of ~ 20 m. Similar results are obtained when the problem is solved in the form of radiation of a wide beam. The results of solving the problems allow to formulate certain requirements for the design of ultrasonic detectors used for underwater transmission of information, which will make it possible to implement the method of information transmission from deep water areas when using an underwater dosimetric complex and, in addition, to develop a sound method of communication in deep water areas, which will play a significant role in solving the problems of information transmission in these specific conditions.

Keywords: sea areas, underwater dosimetric complex, buffer device, ultrasound properties, sea water salinity, radiation frequency, boundary value problems, spherical geometry.

Введение

При проведении работ, связанных с радиационным контролем окружающей среды, рассматривают не только радиоактивное загрязнение воздушного бассейна и подстилающей поверхности, но и придонной поверхности глубоководных морских и речных акваторий. В этом убеждают известные радиационные аварии, которые имели место в губе Андреева¹ (1982 г.) и бухте Чажма²

(1985 г.) в СССР. Радиационная авария на АЭС Фукусима-1 в 2011 г. в Японии, к сожалению, продолжила этот список при радиоактивном загрязнении (тритием и углеродом-14) вод Тихого океана, куда, в настоящее время, сбрасывают частично очищенную воду, которая использовалась для охлаждения реакторов после аварии³.

Использовать традиционные методы радиационного контроля в таких условиях весьма затруднительно, поскольку требуется не только отбор проб загрязненной воды, но

¹ Операции на губе: как ликвидируют ядерное наследие на берегу Баренцева моря. – Страна Росатом : отраслевое издание госкорпорации «Росатом». – Режим доступа: <https://stranarosatom.ru/2021/10/21/operacii-na-gube-kak-likvidirujut-yader/> (дата обращения: 10.06.2024).

² Саркисов А.А., Высоцкий В.Л. Ядерная авария на атомной подводной лодке в бухте Чажма. Реконструкция событий и анализ последствий.

Вестник Российской академии наук. 2018;88(7):599–618. <https://doi.org/10.31857/S086958730000083-9>

³ Слив подсчитан: Япония сбросит в океан более 1 млн. т. радиоактивной воды. – РБК. – Режим доступа: <https://prim.rbc.ru/prim/23/08/2023/64e5cf4a9a7947163505764d> (дата обращения: 10.06.2024).

и донных отложений, расположенных на значительной глубине, что и определяет сложность проблемы подобного радиационного контроля. На малых глубинах еще можно использовать технологию «удочки» – сканировать донную поверхность, опуская с плав средства, на котором располагается оператор, дозиметрическое оборудование (γ -спектрометр, γ -детектор и др.) на дно водоема [1], но с увеличением глубины погружения приборов это становится весьма проблематичным, так как радиоканал передачи данных не работает в морской воде на глубинах больше 5 м, а для передачи данных с дозиметрического оборудования, в этом случае, необходимо использовать кабель связи, длина которого будет расти по мере увеличения глубины и удаленности оператора от точки наблюдения [2]. Поэтому и возникает задача разработки средства для беспилотного сканирования донной поверх-

ности с интерактивным вмешательством оператора и автономным режимом работы беспилотного подводного дозиметрического комплекса (ПДК) [3–5] (рис. 1). В качестве инструмента прямой связи оператора с ПДК и в обратном направлении авторы работ [6–8] предложили использовать ультразвуковой детектор, устанавливаемый на платформе на внешней поверхности ПДК, схема устройства и принцип работы которого приведены на рисунке 2.

При изучении вопроса передачи информации в водной среде обычно сталкиваются с проблемой прохождения излучения в пресной или соленой воде. Известно, что электромагнитное излучение в виде радиоволн имеет ограниченное распространение в водной среде, при этом в пресной воде оно составляет не более 10 м, а в соленой еще меньше, т.е. ~ 5 м.

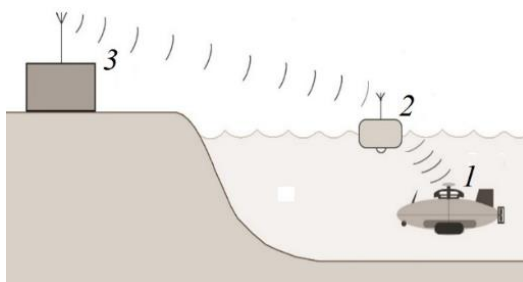


Рисунок 1. Схематичное изображение метода приема-передачи данных оператором с рабочей станции на ПДК через буферное устройство. 1 – подводный дозиметрический комплекс (ПДК); 2 – буферное устройство; 3 – рабочая станция оператора [5,6]

Figure 1. Schematic representation of the data reception-transmission method by the operator from the workstation to the MPC through the buffer device. 1 – underwater dosimetric complex (UDC); 2 – buffer device; 3 – operator's workstation [5,6]

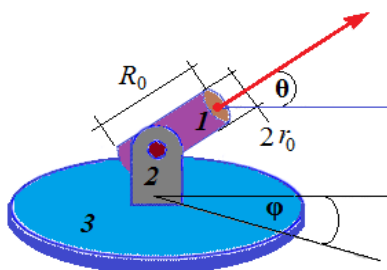


Рисунок 2. Принципиальная схема устройства поиска оптимального направления передачи информации с ПДК на буферное устройство: 1 – ультразвуковой детектор; 2 – стойка; 3 – платформа, описывающая вместе с излучателем при своем вращении верхнюю полусферу [5,6]

Figure 2. Schematic diagram of the device to search for the optimal direction of information transfer from the UDC to the buffer device: 1 – ultrasonic detector; 2 – rack; 3 – platform, describing together with the transmitter in its rotation of the upper hemisphere [5,6]

Напротив, распространение ультразвука в воде обладает определенным преимуществом, которое, в отличие от электромагнитных волн, состоит в том, что он может распространяться только в упругой среде (воздухе, жидкости и т.д.), создавая локальные перепады давления, образующие движущиеся волны. В общей сложности распространение этого вида излучения зависит от температуры среды, ее солености, давления столба воды, частоты излучения, а скорость его распространения c_0 составляет величину $\sim 1,5$ км/с. Поэтому использование этого вида излучения требует изучения всех указанных особенностей, что и позволит, в конечном итоге, найти оптимальное решение указанной проблемы. Задача, частично, осложняется еще и тем, что при прохождении ультразвука в водной среде происходит его поглощение, которое существенно зависит от частоты излучения. Поэтому передатчик информации должен обладать определенными свойствами, которые позволили бы передавать информации в заданном спектре частот на заданное расстояние $R \sim 1$ км без существенной потери мощности излучения, т.е. ультразвуковой детектор должен обладать свойством резко выраженной направленности, которая позволит увеличить дальность действия акустических волн без дополнительного увеличения мощности. Эти требования и обуславливают интерес авторов к задаче прохождения анизотропного ультразвукового излучения в глубоководных морских акваториях, поскольку в литературе, как правило, рассматривается задача изотропного излучения пульсирующей сферической поверхности. [9]

Основная часть

В конечном итоге задача ставится следующим образом. В придонной поверхности морской акватории осуществляется сканирование ее радиоактивного загрязнения. Полученные результаты с частотой $\omega_{\text{изл}}$ передаются на буферное устройство, расположенное на водной поверхности акватории, при помощи ультразвукового передатчика, установленного на ПДК (см. рис. 1), предварительно определив оптимальное направление излучения. Последнее достигается

путем использования этого передатчика с узкой диаграммой направленности в качестве прямо-передающего устройства, регистрирующего ответный сигнал, для дискретно заданных значений в азимутальном (меридиональном) и «широтном» направлениях (см. рис. 2) [5,6]. Максимальное значение ответного сигнала и означает выбор оптимального направления, в котором целесообразно проводить связь (см. табл. 1). При выборе этого направления детектор описывает полусферу радиусом $R_0 = l$ (l – длина ультразвукового детектора), вращаясь вокруг своей оси в азимутальном $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и широтном $0 \leq \theta < \pi/2$ направлениях, располагаясь, практически, на донной поверхности акватории.

Таблица 1. Значение показаний ультразвукового детектора при выборе оптимального направления (отн. ед.)

Table 1. Value of ultrasonic detector readings when the optimum direction is selected (relative units)

φ/θ	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
φ_0	0	15	30	45	60	75	90
φ_1	30	63	63	69	80	70	63
φ_2	60	78	82	90	100	90	82
φ_3	90	73	70	70	75	71	56
φ_4	120	57	60	64	67	67	67
φ_5	150	61	52	59	67	49	59
φ_6	180	60	36	48	46	49	53
φ_7	210	19	31	46	54	25	39
φ_8	240	29	22	25	42	54	60
φ_9	270	41	52	56	50	38	27
φ_{10}	300	34	30	24	15	9	6
φ_{11}	330	6	6	6	6	16	16
φ_{12}	360	6	6	4	3	3	9

Распространение ультразвукового излучения в воде описывается волновым уравнением для давления $P(r, \theta, \varphi, t)$, которое вызывает излучение детектора диаметром $2r_0$ на окружающую его среду (воду), при переносе информации с относительной скоростью распространения ультразвука в воде $c = c_0/R_0$ в направлении безразмерного радиуса $r' = r/R_0$, которое в сферической геометрии имеет вид выражения (1) [9] с граничными условиями (2), (3):

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \times \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{r=R_0} = P_0(r)|_{r=R_0} \delta(\theta - \theta^*) \delta(\varphi - \varphi^*), \quad (2)$$

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{r=\infty} = 0. \quad (3)$$

Произведение δ -функций в граничном условии (2), в рамках рассматриваемой модели, физически определяет диаграмму «рассеяния» излучения, а значение $P_0(r) = P_{\text{изл}} \cdot \exp(-\alpha r)$, ($P_{\text{изл}}$ – мощность ультразвукового детектора при его контакте с водой на границе сферы при $r = R_0$ с частотой $\omega_{\text{изл}}$ в точке излучения под углами $\theta = \theta^*$, $\varphi = \varphi^*$) зависит от коэффициента поглощения акустических волн α (Нп/км)⁴, который, в свою очередь, зависит от частоты излучения $\omega_{\text{изл}}$, кГц; химического состава солей (табл. 2); солености морской воды S ‰; гидростатического давления воды p , атм; температуры T , К и определяется выражением (4), [9]:

$$\alpha = \left(\frac{A \cdot \omega_T \cdot \omega_{\text{изл}}^2 S}{\omega_T^2 - \omega_{\text{изл}}^2} + \frac{B \cdot \omega_{\text{изл}}^2}{\omega_T} \right) (1 - C \cdot p), \quad (4)$$

где $\omega_T = 21,9 \cdot 10^{-6}$ кГц; $A = 2,34 \cdot 10^{-6}$ Нп/(кГц·км); $B = 3,38 \cdot 10^{-6}$ Нп/(кГц·км); $C = 6,54 \cdot 10^{-4}$ ат⁻¹.

Таблица 2. Химический состав солей морской воды, %

Table 2. Chemical composition of seawater salts, %

Хлориды: 88,7%	NaCl (77,8)	MgCl (10,9)	–
Сульфаты: 10,8%	K ₂ SO ₄ (2,5)	MgSO ₄ (4,7)	CaSO ₄ (3,6)
Карбонаты: 0,34%	KCO ₃ (0,2)	–	CaCO ₃ (0,14)
Бромистый магний и др.	MgBr ₂ (0,16)	–	–

На рисунках 3–5 представлены зависимости солености, температуры и плотности

⁴ Непер (Нп) – логарифмическая безразмерная единица измерения отношения двух уровней, затуханий или усиления. Непер не входит в систему единиц СИ. Разница между децибелом и непером заключается в том, что отношение величин, выраженное децибелах, предполагает использование десятичных логарифмов, тогда как для отношения в неперах используются натуральные логарифмы. Для перехода к децибелам следует учитывать, что 1 Нп = 8,686 дБ.

морской воды как функции глубины [10]. Ограничиваясь глубиной 200 м (согласно принятым условиям на разработку) можно констатировать следующее. Согласно представленному на рисунке 3 графику соленость морской воды до глубины 400 м можно аппроксимировать линейной зависимостью $S(h) = 35,5 - 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot h$ для h на интервале $0 \leq h \leq 400$ м. В общем случае соленость морей зависит от соотношения атмосферных осадков и испарения, притока поверхностных вод, таяния ледников и т.д. и приводится в таблице 3. Относительно температуры (рис. 4) можно констатировать ее постоянство до глубины 200 м, что определяет постоянство и коэффициента ω_T , в формуле (4), описывающей коэффициент α , а изменение плотности воды (рис. 5) можно также представить в виде ее линейной зависимости в указанном диапазоне глубин выражением: $\rho(h) = 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot h + 1,025$ г/см³, но в силу незначительного характера изменений можно ограничиться средней величиной $\rho(h) = 1,026$ г/см³, при этом гидростатическое давление воды p , присутствующее в формуле коэффициента поглощения, определится давлением столба воды $p = \bar{\rho}gh$ Н/см², где g – ускорение свободного падения. Таким образом, изменения коэффициента поглощения морской воды α на глубине не больше 200 м в основном, будет зависеть от солености воды $S(h)$ и частоты излучения $\omega_{\text{изл}}$.

Таблица 3. Соленость воды в некоторых морях и заливах в (‰)

Table 3. Water salinity in some seas and bays in (‰)

Средиземное море	39
Черное море	18
Карское море	10
Баренцево море	35
Бенгальский залив	42
Красное море	43
Карибское море	35

⁵ Графическое представление зависимостей можно найти по ссылке: <https://studfile.net/preview/6075064/page:3/>

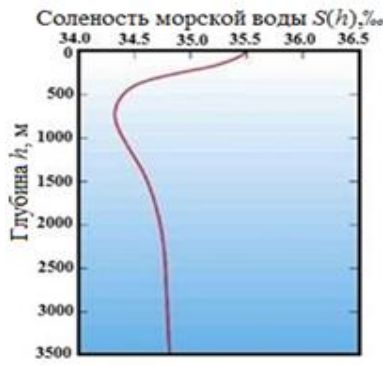


Рисунок 3. Зависимость солености морской воды $S(h)$ ‰ от глубины h м⁵ (Галоклин)
Figure 3 Dependence of seawater salinity $S(h)$ ‰ on depth h m [10] (Galoklin)

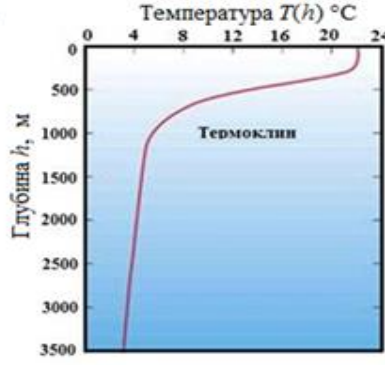


Рисунок 4. Зависимость температуры $T(h)$ °C морской воды от глубины h м⁵ (Термоклин)
Figure 4. Dependence of seawater temperature $T(h)$ °C on depth h m [10] (Thermocline)

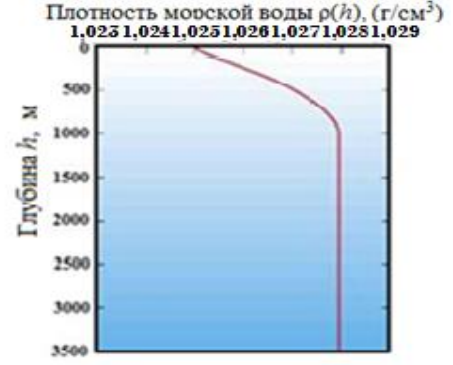


Рисунок 5. Зависимость плотности $\rho(h)$ (г/см³) морской воды от глубины h м⁵ (Пикноклин)
Figure 5. Dependence of seawater density $\rho(h)$ (г/см³) on depth h m [10] (Pycnocline)

В широтном диапазоне углов граничное условие представим в виде выражения (5):

$$P(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\theta=\theta^*} = P_0(r) \delta(\theta - \theta^*), \quad (5)$$

где угол θ^* определяется детектором согласно выбору оптимального направления (см. табл. 1 и рис. 6).

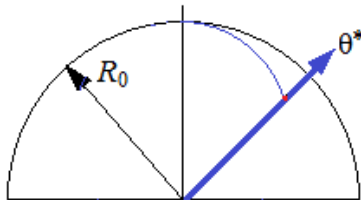


Рисунок 6. Условие излучения ультразвукового детектора из подводного положения в широтном направлении
Figure 6. Ultrasonic detector radiation condition from underwater position in latitudinal direction

Последнее означает, что широтные значения угла θ ультразвукового излучения лежат в верхней полусфере области их определения, поскольку, согласно условиям задачи $P(r, \theta, \varphi, t) \equiv 0$ при $\theta \geq \pi/2$ (см. рис. 6). Для азимутального (меридионального) направления граничное условие представим в виде выражения (6):

$$P(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = P_0(r) \delta(\varphi - \varphi^*), \quad (6)$$

где угол φ^* также определяется детектором по оптимальному направлению (см. табл. 1 и рис. 7). Начальные условия формулируем следующим образом в выражениях (7), (8):

$$P(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{t=0} = P_0(r) \delta(\theta - \theta^*) \delta(\varphi - \varphi^*), \quad (7)$$

$$\frac{dP}{dt}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

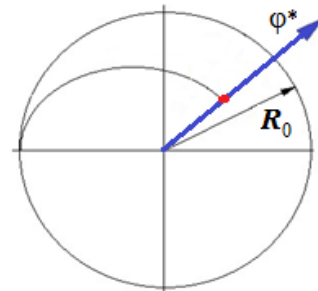


Рисунок 7. Условие излучения ультразвукового детектора из подводного положения в азимутальном направлении
Figure 7. Ultrasonic detector radiation condition from underwater position in azimuthal direction

Метод решения задачи

Для решения задачи (1) – (8) представим искомую функцию $P(r, \theta, \varphi, t)$ в виде суммы в выражении (9):

$$P(r, \theta, \varphi, t) = P_1(r) + P_2(r, \theta, \varphi, t). \quad (9)$$

Для функции $P_1(r)$ ставится задача (10), (11), (12):

$$\Delta P_1 = 0, \quad (10)$$

$$P_1(r)|_{r=R_0} = P_0(R_0)\delta(\theta - \theta^*)\delta(\varphi - \varphi^*), \quad (11)$$

$$P_1(r)|_{r=\infty} = 0, \quad (12)$$

где $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – оператор Лапласа

в сферической геометрии, а граничные условия (11), (12) определяют значения постоянных коэффициентов решения уравнения (10). Для функции $P_2(r, \theta, \varphi, t)$ будет справедливо уравнение (13) с граничными условиями (14), (15), (16), (17):

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0, \quad (13)$$

$$P_2(r, \theta, \varphi, t)|_{r=R_0} = 0, \quad (14)$$

$$P_2(r, \theta, \varphi, t)|_{r=\infty} = 0, \quad (15)$$

$$P_2(r, \theta, \varphi, t)|_{\theta=\theta^*} = P_0(r)\delta(\theta - \theta^*) - P_1(r), \quad (16)$$

$$P_2(r, \theta, \varphi, t)|_{\varphi=\varphi^*} = P_0(r)\delta(\varphi - \varphi^*) - P_1(r), \quad (17)$$

которые дадут возможность получить собственные значения для собственных функций, определяющих решение уравнения (13), и начальными условиями (18), (19):

$$P_2(r, \theta, \varphi, t)|_{t=0} = P_0(r)\delta(\theta - \theta^*) \times \delta(\varphi - \varphi^*) - P_1(r), \quad (18)$$

$$\frac{dP_2}{dt}(r, \theta, \varphi, t)|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Подставляя в формулу (13) функцию $P_2(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\omega_c t} V(r) Y(\theta, \varphi)$, где i – мнимая единица, ω_c – собственная частота переноса излучения (c^{-1}) и учитывая, что размерность величины c аналогична частоте ω_c , формально можно положить ($\omega_c = c = c_0/R_0$), и при $\omega_c \neq \omega_{изл}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\omega_c^2}{c^2} V(r) Y(\theta, \varphi) + \frac{Y(\theta, \varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{V(r)}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0,$$

в котором, применяя метод разделения переменных [11], умножим каждое слагаемое на r^2 и разделим на произведение $V(r) Y(\theta, \varphi)$. При этом получим сумму двух отношений,

приравнивая каждое из которых к некой постоянной λ , получаем два уравнения (20), (21) для функций $V(r)$ и $Y(\theta, \varphi)$ соответственно:

$$\frac{\frac{\omega_c^2 r^2}{c^2} V(r) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)}{V(r)} = - \frac{\left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right]}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \left(\frac{\omega_c^2 r^2}{c^2} - \lambda \right) V(r) = 0, \quad (20)$$

$$\left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0. \quad (21)$$

Функцию $Y(\theta, \varphi)$ также можно представить в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одного аргумента $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Psi(\varphi)$. Подставляя произведение функций в формулу (21), разделяя переменные и, поделив каждое из слагаемых на произведение функций $\Theta(\theta)\Psi(\varphi)$, также получим выражение, состоящее из двух слагаемых, каждое из которых представляет отношение:

$$\frac{\Psi(\varphi)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \lambda \Theta(\theta) \Psi(\varphi) = 0.$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) = m \rightarrow \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - m \Theta(\theta) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \lambda \Psi(\varphi) = -m \rightarrow \left(\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \sin^2(\theta) (\lambda + m) \Psi(\varphi) = 0, \quad (23)$$

Отметим, что в уравнении (23) $\sin^2(\theta)$ является ограниченным параметром, который не зависит от φ и для функции $\Psi(\varphi)$ может играть роль просто некоторой постоянной. В таком случае произведение постоянных $\sin^2(\theta)(\lambda+m)$ можно определить одной постоянной $\mu = \sin^2(\theta)(\lambda+m)$, что дает возможность

сокращая одноименные функции в каждом из отношений и приравнявая каждое из выражений некоей постоянной m , полученное выражение перепишем в следующем виде:

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{\Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \lambda \Psi(\varphi) = m,$$

из которого следует два уравнения – (22) и (23):

найти постоянную m из равенства [9]: $m = \mu / \sin^2(\theta) - \lambda$, при которой уравнение (22) будет иметь вид выражения (24), а уравнение (23) представим в виде выражения (25):

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \Psi(\varphi) = 0. \quad (25)$$

При условии периодичности функции $\Psi(\varphi)$: $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$, это уравнение будет иметь множество решений только при целом $\mu = n^2$ [9], при этом линейно независимые решения определяются функциями $\cos(n\varphi)$ и

$\sin(n\varphi)$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$ так, что $\Psi_{-n}(\varphi) = A_{-n} \cos(n\varphi)$, $\Psi_n(\varphi) = A_n \sin(n\varphi)$, а уравнение (24) будет выглядеть следующим образом в выражении (26):

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (26)$$

Для решения уравнения (26) проводят замену переменных, полагая $x = \cos(\theta)$, $-1 < x < +1$, $\Theta(\theta) = U(x)$ и, рассматривая $\Theta(\theta)$ как сложную функцию $\Theta = \Theta(U(x(\theta)))$, после несложных преобразований вместо выражения (26), получают уравнение Лежандра (27) [12], допускающее ограниченное решение только при $\lambda = v(v+1)$ [13], в котором пара-

метр n называют порядком, а постоянную v – степенью. Этими решениями при $n \leq v$ являются присоединенные полиномы Лежандра $P_v^n(x)$, что позволяет функцию $Y(\theta, \varphi)$ записать как [9,12]: $Y(\theta, \varphi) = U(\cos(\theta))\Psi(\varphi)$, которую представляют в виде ряда (28):

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - 2x\frac{dU}{dx} + \left[\lambda - \frac{n^2}{1-x^2}\right]U = 0, \quad (27)$$

$$Y_v(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^v (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) P_v^n(\cos(\theta)), \quad (28)$$

где при $x = \cos(\theta)$, $P_v^n(x)$ имеет вид:

$P_v^n(x) = \frac{(-1)^v}{2^v v!} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{n+v}(1-x^2)^v}{dx^{v+n}}$. На интервале $-1 < x < +1$ функции $P_v^n(x)$ как различной степени v , так и различного порядка n ортогональны [11], т.е. $\int_{-1}^1 P_v^n(x) P_{v'}^{n'}(x) dx = 0$, $v \neq v'$ или $n \neq n'$ [11, 12], при этом получают выражение (29) [14]:

$$\int_{-1}^1 [P_v^n(x)]^2 dx = \left(\frac{2}{2v+1}\right) \frac{(v+n)!}{(v-n)!}. \quad (29)$$

Для решения уравнения (20) продифференцируем его и приведем к виду

$$V'' + \frac{2V'}{r} + \left[k^2 - \frac{v(v+1)}{r^2}\right]V = 0; \quad k = \omega_c/c = 1,$$

а после подстановки $V(r) = R(r)/\sqrt{r}$ получа-

ем выражения $V'(r) = \frac{2R'r - R}{2r^{3/2}}$ и

$$V''(r) = \frac{R''}{r^{1/2}} - \frac{R'}{r^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{R}{r^{5/2}}, \quad \text{подставляя кото-}$$

рые в последнее уравнение, получим

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[1 - \frac{(v+1/2)^2}{r^2}\right]R = 0.$$

Функции $j_v(r)$ и $y_v(r)$ в формуле (31) могут быть выражены через элементарные функции [12]:

$$\begin{aligned} j_v(r) &= r^{-1} [P(v+1/2, r) \sin(r-v\pi/2) + Q(v+1/2, r) \cos(r-v\pi/2)]; \\ y_v(r) &= (-1)^{v+1} r^{-1} [P(v+1/2, r) \cos(r-v\pi/2) - Q(v+1/2, r) \sin(r-v\pi/2)], \end{aligned}$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение Бесселя полуцелого порядка, линейно-независимые решения которого определяются цилиндрическими функциями полуцелого порядка [9,11]: Выбор решения $R(r)$ осуществляют, исходя из физических условий задачи [9], в частности, в рассматриваемой задаче, требуя ограниченности решения на бесконечности, в соответствии с условием (15): $R_0 \leq r \leq \infty$. $R(r) = Z_{v+1/2}(r)$, где $Z_{v+1/2}(r)$ – есть решение уравнения Бесселя с параметром $p = v+1/2$, которые также обладают свойством ортогональности с весом $r^{-(v+1/2)}$ [15]. При этом функция $V(r)$ запишется в виде выражения (30) [11]:

$$V(r) = \frac{R(r)}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} Z_{v+1/2}(r) \quad (30)$$

Этим условиям удовлетворяет вторая цилиндрическая функция Ханкеля полуцелого порядка (31) [9]:

$$\begin{aligned} Z_{v+1/2}(r) &= H_{v+1/2}^{(2)}(r) = \sqrt{(\pi/2r)} h_v^{(2)}(r); \\ h_v^{(2)}(r) &= j_v(r) - iy_v(r). \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$P(v+1/2, r) = 1 - \frac{(v+2)!}{2!\Gamma(v-1)}(2r)^{-2} + \frac{(v+4)!}{4!\Gamma(v-3)}(2r)^{-4} - \dots = \sum_{m=0}^{v/2} (-1)^m (v+1/2, 2m)(2r)^{-2m},$$

$$Q(v+1/2, r) = \frac{(v+1)!}{1!\Gamma(v)}(2r)^{-1} - \frac{(v+3)!}{3!\Gamma(v-2)}(2r)^{-3} + \frac{(v+5)!}{5!\Gamma(v-4)}(2r)^{-5} - \dots = \sum_{m=0}^{[(v-1)/2]} (-1)^m (v+1/2, 2m+1)(2r)^{-2m-1}$$

$$(v=0, 1, 2, \dots).$$

Значения функции $(v+1/2, m)$ для различных v и m представлены в таблице 4. При этом зависимость давления ультразвуковой волны как функция расстояния r , т.е. распространение ультразвука в водной среде, будет определяться действительной частью функции $\text{Re } h_v^{(2)}(r) = j_v(r)$ выражения (31). Решение задачи (10) – (12) с учетом граничных условий (11), (12) определяется выражением (32):

$$P_1(r) = P_{\text{изл}} \frac{R_0}{r} \exp(-\alpha R_0) \delta(\theta - \theta^*) \delta(\varphi - \varphi^*). \quad (32)$$

Таким образом, произведение функций $V(r)Y(\theta, \varphi)$ представляет собой выражение (33). Чтобы получить общее решение для функции $P_2(r, \theta, \varphi, t)$, необходимо еще умножить выражение (33) на $\exp(\pm i\omega_c t)$ или, что аналогично выражению $[C_1 \cos(\omega_c t) + C_2 \sin(\omega_c t)]$, и воспользоваться начальным условием (19), что дает возможность положить $C_2 = 0$. Последнее позволяет записать окончательное решение уравнения (13) в виде (34), в котором постоянные A_{vn} и B_{vn} будут содержать постоянную C_1 :

$$V(r)Y(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r), \quad (33)$$

$$P_2(r, \theta, \varphi, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r). \quad (34)$$

Таблица 4. Значение функции $(v+1/2, m) = [(v+m)!]/[v!\Gamma(v-m+1)]$ [12]

Table 4. Function value $(v+1/2, m) = [(v+m)!]/[v!\Gamma(v-m+1)]$ [12]

$(v+1/2, m) = \frac{(v+m)!}{v!\Gamma(v-m+1)}, [12]$					
m v v	1	2	3	4	5
1	2				
2	6	12			
3	12	60	120		
4	20	180	840	1680	
5	30	420	3360	15120	30240

Решение задачи распространения ультразвука в водной среде для внешней краевой задачи будет определяться, согласно [9], выражением (34). Для определения постоянных

A_{vn} и B_{vn} необходимо использовать граничные условия (16), (17) и начальное условие (18) при $t = 0$. Таким образом, имеем выражения (35) – (37):

$$\begin{aligned}
P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\theta - \theta^*) \left[r^{1/2} \exp(-\alpha r) - \exp(-\alpha R_0) \frac{R_0}{r^{1/2}} \delta(\varphi - \varphi^*) \right] = \\
= \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r),
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\varphi - \varphi^*) \left[r^{1/2} \exp(-\alpha r) - \exp(-\alpha R_0) \frac{R_0}{r^{1/2}} \delta(\theta - \theta^*) \right] = \\
= \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r),
\end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\varphi - \varphi^*) \delta(\theta - \theta^*) \left[r^{1/2} \exp(-\alpha r) - \exp(-\alpha R_0) \frac{R_0}{r^{1/2}} \right] = \\
= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r).
\end{aligned} \quad (37)$$

Для определения указанных постоянных следует умножить правые и левые части уравнений (35) – (37) на произведение функций $(A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\cos(\theta)) j_v(r)$ и, используя свойство ортогональности присоединенных полиномов Лежандра и

функций Бесселя полуцелого порядка с весом $r^{-(v+1/2)}$ [15,16], а также селективные свойства δ -функций, проинтегрировать полученные выражения. Осуществляя подобную процедуру, вместо выражения (35) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\left\{ \int_0^{2\pi} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi \int_{-1}^1 P_v^n(x) \delta(x - x^*) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha r)}{r^n} j_v(r) dr - \right. \\
\left. - R_0 \exp(-\alpha R_0) \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi^*) (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi \int_{-1}^1 \delta(x - x^*) P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{j_v(r)}{r^{n+1}} dr \right\} = \\
= \pi \cos(\omega_c t) (A_{vn}^2 + B_{vn}^2) \|P_v^n(x)\|^2 \|j_v(r)\|^2.
\end{aligned}$$

В полученном выражении первое слагаемое в фигурных скобках оказывается равным нулю в силу равенства нулю первого сомножителя, представляющего собой инте-

грал по азимутальному углу φ , а вычисляя второе слагаемое получаем выражение (38); проводя аналогичную процедуру с выражением (36), получаем выражение (39):

$$\begin{aligned}
-P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[R_0 \exp(-\alpha R_0) (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) P_v^n(x^*) \int_{R_0}^{\infty} \frac{j_v(r)}{r^{n+1}} dr \right] = \\
= \pi \cos(\omega_c t) (A_{vn}^2 + B_{vn}^2) \|P_v^n(x)\|^2 \|j_v(r)\|^2,
\end{aligned} \quad (38)$$

$$P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\begin{aligned} & (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) \int_{-1}^1 P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-ar)}{r^n} j_v(r) dr - \\ & - R_0 \exp(-aR_0) (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) P_v^n(x^*) \int_{R_0}^{\infty} \frac{j_v(r)}{r^{n+1}} dr \end{aligned} \right] = \quad (39)$$

$$= \pi \cos(\omega_c t) (A_{vn}^2 + B_{vn}^2) \|P_v^n(x)\|^2 \|j_v(r)\|^2$$

Также, проводя аналогичную процедуру с выражением (37), находим равенство, в котором правая часть представляет собой вы-

ражение как в формулах (38), (39) при $t = 0$ ($\cos(\omega_c t) = 1$), а левая принимает вид выражения (40):

$$P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) P_v^n(x^*) \int_{R_0}^{\infty} \left[\frac{\exp(-ar)}{r^n} - \exp(-aR_0) \frac{R_0}{r^{n+1}} \right] j_v(r) dr = \quad (40)$$

$$= \pi (A_{vn}^2 + B_{vn}^2) \|P_v^n(x)\|^2 \|j_v(r)\|^2$$

Из равенства правых частей выражений (38), (39) следует равенство их выражений в квадратных скобках в уравнении (41):

$$\begin{aligned} & \left[-R_0 \exp(-aR_0) (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) P_v^n(x^*) \int_{R_0}^{\infty} \frac{j_v(r)}{r^{n+1}} dr \right] = \\ & = \left[\begin{aligned} & (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) \int_{-1}^1 P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-ar)}{r^n} j_v(r) dr - \\ & - R_0 \exp(-aR_0) (A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) P_v^n(x^*) \int_{R_0}^{\infty} \frac{j_v(r)}{r^{n+1}} dr \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Из уравнения (41) следует, что $(A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)) = 0$, поскольку произведение $\int_{-1}^1 P_v^n(x) dx \cdot \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-ar)}{r^n} j_v(r) dr \neq 0$.

Откуда находим $A_{vn} = -B_{vn} \tan(n\varphi^*)$. Используя уравнение (40) получаем, что и

$(A_{vn}^2 + B_{vn}^2) = 0$. Из чего следует $B_{vn}^2 [tg^2(n\varphi^*) + 1] = 0$ и, в конечном итоге, $B_{vn} = A_{vn} \equiv 0$, т.е. $P_2(r, \theta, \varphi, t) \equiv 0$. Таким образом, решение задачи (1) – (8) с учетом анизотропии излучения определяется решением (10) – (12) и описывается выражением (42):

$$P(r, \theta, \varphi, t) = P_{\text{изл}} R_0 \frac{\exp(-ar)}{r} \delta(\theta - \theta^*) \delta(\varphi - \varphi^*). \quad (42)$$

В условиях эксперимента решение находят для некоторой заданной частоты $\omega_{\text{изл}}$, выбирая за основу выражение $[\exp(-ar)/r]$, в котором в показатель экспоненты вводят поправочный коэффициент k , а знаменатель записывают с показателем n ($n \sim 1$) в виде r^n , измеряя давление излучения на различных

расстояниях от источника r_i , $i = 1 \dots N$, где N – число измерений [9]. Затем, обрабатывая полученные данные, находят оптимальные параметры (k_i^*, n_i^*) , которые и используют в практических целях с выбранной частотой $\omega_{\text{изл}}$.

Очевидно, что такой метод определения функции излучения ультразвука в морской среде будет достаточно надежен для заданных расстояний от источника, но может давать значительную погрешность при иной частоте излучения, требуя переопределения указанных параметров, что в общем случае указывает на неоднозначность и неудобство такого подхода к решению задачи.

Анализ результатов расчета

Решение (40) интересно тем, что представляя собой аналитическое выражение, характеризующее давление на водную среду (морскую воду) в зависимости от ее солёности $S(h)$, давления столба воды $P(h)$ и частоты излучения $\omega_{\text{изл}}$, позволяет получить оценку максимального расстояния r , на котором передача информации по ультразвуковому каналу будет осуществляться с относительной погрешностью δ при заданной частоте излучения и заданном направлении не хуже погрешности $\delta_{\text{ту}}$ приема-передачи информации ультразвуковым детектором, определенной техническими условиями, с учетом всех особенностей передачи информации в морской воде, о которых сообщалось ранее. Указанная величина представляет собой отношение (43):

$$(P_{\text{м}} - P_{\text{к}})/P_{\text{м}} \leq \delta_{\text{ту}}, \quad (43)$$

где $\delta_{\text{ту}}$ – погрешность приема-передачи, определенная техническими условиями, $P_{\text{м}}$ – давление ультразвука на максимальном расстоянии от источника (на пределе чувствительности ультразвукового детектора); $P_{\text{к}}$ – давление ультразвука на критическом расстоянии от источника.

На рисунке 8 приводится семейство кривых ультразвукового давления на водную среду $P(r, \theta, \varphi, t)$ как функции и расстояния r в направлении излучения, определяемого углами $\theta = \theta^*$ и $\varphi = \varphi^*$, при различной частоте излучения $\omega_{\text{изл}}$ (кГц). Зависимость давления от солёности среды $S(h)$ носит незначительный характер и наблюдается лишь в третьем знаке после запятой при низких частотах.

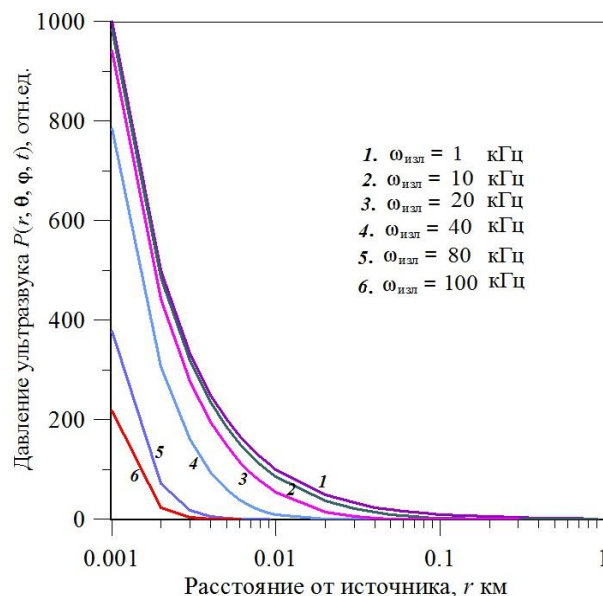


Рисунок 8. Зависимость давления ультразвукового излучения детектора как функции расстояния от источника. Параметром служит частота излучения $\omega_{\text{изл}}$: 1 кГц – (1), 10 кГц – (2), 20 кГц – (3), 40 кГц – (4), 80 кГц – (5), 100 кГц – (6)

Figure 8. Dependence of ultrasonic radiation pressure of the detector as a function of distance from the source. The parameter is the frequency of radiation ω_{rad} : 1 kHz – (1), 10 kHz – (2), 20 kHz – (3), 40 kHz – (4), 80 kHz – (5), 100 kHz – (6)

Из представленных зависимостей следует, что наибольшее расстояние r , на которое распространяется ультразвуковое излучение источника при указанной частоте излучения (1 кГц) составляет 1 км, что соответствует требованиям, выдвигаемым к реальным условиям работы макета ПДК при оценке $P_{\text{к}}$. С ростом частоты излучения быстро затухает, что согласуется с известными экспериментальными данными: на 300 м ($\omega_{\text{изл}} = 10$ кГц), 100 м ($\omega_{\text{изл}} = 20$ кГц), 30 м ($\omega_{\text{изл}} = 40$ кГц), 9 м ($\omega_{\text{изл}} = 80$ кГц) и 4 м ($\omega_{\text{изл}} = 100$ кГц).

С ростом мощности излучения при узкой диаграмме направленности (рис. 9) можно ожидать вполне надежной связи при передаче информации предлагаемым методом даже с учетом погрешности измерения, определяющей максимальное расстояние передачи информации.

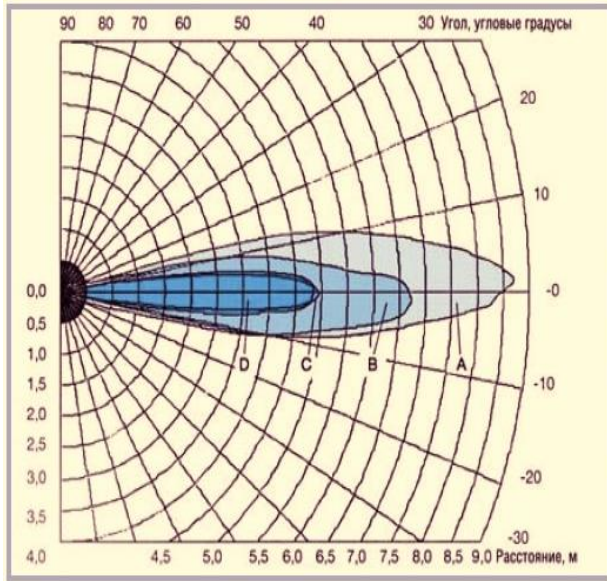


Рисунок 9. Пример реальной диаграммы направленности ультразвукового датчика излучения UJ400-FP-H12. A, B, C, D – Зоны чувствительности для разных измеряемых объектов [17]

Figure 9. Example of real directional diagram of ultrasonic radiation sensor UJ400-FP-H12. A, B, C, D – Sensitivity zones for different measured objects [17]

Таким образом, решение задачи (1) – (8) дает наглядное представление об особенностях прохождения ультразвукового сигнала с частотой излучения $\omega_{\text{изл}}$ в морской воде, характеризующейся соленостью $S(h)$. Вместе с тем, следует отметить, что представленная выше задача не вполне отвечает реальным условиям, которые определяются тем, что излучение ультразвукового детектора осуществляется с поверхности детектора радиуса r_0 , как указывалось ранее, и характеризуется определенным угловым раствором с генеральным направлением, определяемым углами $\theta = \theta^*$ и $\varphi = \varphi^*$, заданными, как и в первом случае (см. табл. 1).

Поэтому авторы считают целесообразным получить решение, которое следует из уравнения (1), но с граничными условиями, характеризующимися диаграммой рассеяния излучения в виде произведения единичных функций, определяющих излучение с поверхности детектора радиусом R_0 (44) и $r = \infty$ (45); в широтном диапазоне углов граничное условие представим в виде выражения (46):

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{r=R_0} = P_0(r)|_{r=R_0} \cdot [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)], \quad (44)$$

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{r=\infty} = 0, \quad (45)$$

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} = P_0(r) [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)], \quad (46)$$

где $0 \leq \theta_1 < \pi/2$; $\theta_1 < \theta_2$; $0 \leq \theta_2 < \pi/2$, $\theta_1 = \theta^* - \Delta\theta$, $\theta_2 = \theta^* + \Delta\theta$, $\Delta\theta = \arcsin(r_0/R_0)$, а угол θ^* определяется детектором согласно выбору оптимального направления (см. табл. 1 и рис. 10). Последнее означает, что широтные значения углов θ_1 и θ_2 ультразвукового излучения также, как и в первом случае, лежат в верхней полусфере области их определения, поскольку, согласно условиям задачи $P(r, \theta, \varphi, t) \equiv 0$ при $\theta \geq \pi/2$ (см. рис. 10). Для азимутального (меридиональ-

ного) направления граничное условие представим в виде (47):

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2} = P_0(r) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)], \quad (47)$$

где $0 \leq \varphi_1 \leq \pi$; $\pi \leq \varphi_2 \leq 0$; $\varphi_1 < \varphi_2$ и $\varphi_1 = \varphi^* - \Delta\varphi$, $\varphi_2 = \varphi^* + \Delta\varphi$, $\Delta\varphi = \arcsin(r_0/R_0)$, а угол φ^* определяется детектором по оптимальному направлению (см. табл. 1 и рис. 11).

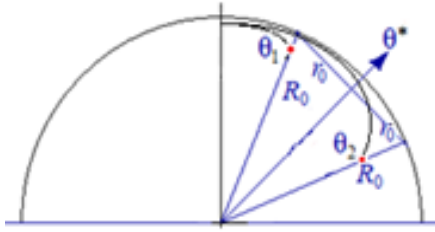


Рисунок 10. Условие излучения ультразвукового детектора из подводного положения в широтном направлении

Figure 10. Ultrasonic detector radiation condition from underwater position in latitudinal direction

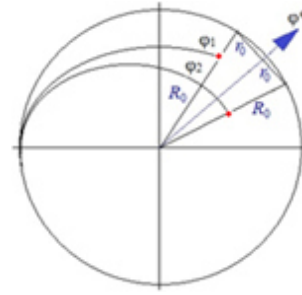


Рисунок 11. Условие излучения ультразвукового детектора из подводного положения в азимутальном направлении

Figure 11. Condition of radiation of the ultrasonic detector from the underwater position in the azimuthal direction

Начальные условия определяются выражениями (48), (49):

$$P(r, \theta, \varphi, t)|_{t=0} = P_0(r) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] \times [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)], \quad (48)$$

$$\frac{dP}{dt}(r, \theta, \varphi, t)|_{t=0} = 0. \quad (49)$$

Как и в первом случае представим искомую функцию $P(r, \theta, \varphi, t)$ в виде суммы,

аналогичной формуле (50):

$$P(r, \theta, \varphi, t) = P_3(r) + P_4(r, \theta, \varphi, t), \quad (50)$$

в которой для функции $P_3(r)$ ставится задача (51) – (53):

$$\Delta P_3 = 0, \quad (51)$$

где Δ указанный ранее оператор Лапласа в сферической геометрии.

Граничные условия, определяющие значения постоянных коэффициентов решения уравнения (51), представлены выражениями (52) и (53):

$$P_3(r)|_{r=R_0} = P_0(R_0) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)], \quad (52)$$

$$P_3(r)|_{r=\infty} = 0, \quad (53)$$

Решение уравнения (51) определяется выражением (54):

$$P_3(r) = P_{\text{изл}} \frac{R_0}{r} \exp(-\alpha R_0) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)], \quad (54)$$

в котором произведение единичных функций в квадратных скобках указывает на угловую ограниченность распространения ультразвукового излучения и также пред-

ставляют собой аналог диаграммы рассеяния ультразвукового излучения.

Функция $P_4(r, \theta, \varphi, t)$ будет описываться уравнением (55), подобным уравнению (13):

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_4}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial P_4}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 P_4}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0, \quad (55)$$

с аналогичными граничными условиями (56), (57), (58), (59):

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=R_0} = 0, \quad (56)$$

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=\infty} = 0, \quad (57)$$

которые определяют возможность получения собственных значений для собственных функций, определяющих решение уравнения (55);

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\theta} = P_0(r) [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] - P_3(r), \quad (58)$$

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\varphi} = P_0(r) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] - P_3(r) \quad (59)$$

и начальными условиями (60), (61):

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{t=0} = P_0(r) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] \times [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] - P_3(r), \quad (60)$$

$$\frac{dP_4}{dt}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (61)$$

Далее, применяя процедуру разделения переменных и подставляя в формулу (55) функцию $P_2(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\omega_c t} V(r) Y(\theta, \varphi)$, где i – мнимая единица, ω_c – собственная частота переноса излучения (c^{-1}) ($\omega_c = c_0/R_0$ и $\omega_c \neq \omega_{изл}$), приходим к выражению, полученному ранее:

$$\frac{\omega_c^2}{c^2} V(r) Y(\theta, \varphi) + \frac{Y(\theta, \varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{V(r)}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0.$$

Произведение функций $V(r) Y(\theta, \varphi)$, как и в первом случае представляет собой выражение (33), а использование начальных

условий также позволяет получить окончательное решение в виде выражения (62):

$$P_4(r, \theta, \varphi, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r), \quad (62)$$

в котором коэффициенты A_{vn} и B_{vn} подлежат определению. С этой целью запишем значение интеграла от присоединенных полино-

мов Лежандра на половине интервала его определения $0 \leq \theta \leq \pi/2$ в выражении (63), [14]:

$$\int_0^a x^{\alpha-1} P_v^n \left(\frac{x}{a} \right) dx = 2^{2n-1} \sqrt{\pi} a^{\alpha} \Gamma \left[\frac{\alpha/2}{(1-n)/2, 1 + (\alpha-n)/2} \right] \times {}_3F_2 \left(\frac{v-n+1}{2}, -\frac{n+v}{2}, 1 - \frac{n}{2}; 1-n, 1 + \frac{\alpha-n}{2}; 1 \right) [a, Re \alpha > 0; Re n < 2] \quad (63)$$

где $\Gamma \left[\frac{\alpha/2}{(1-n)/2, 1 + (\alpha-n)/2} \right]$ – гамма-функция;

${}_3F_2 \left(\frac{v-n+1}{2}, -\frac{n+v}{2}, 1 - \frac{n}{2}; 1-n, 1 + \frac{\alpha-n}{2}; 1 \right)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [14].

В условиях настоящей задачи $\alpha = 1$, а верхний предел a , в интегральном выраже-

нии (61), определяется значениями $x_1 = \cos(\theta_1)$ или $x_2 = \cos(\theta_2)$, при x определенном на интервале $1 \leq x \leq 0$. Используя фор-

мулу (60) и выражения, определяющие граничные условия (58) – (60) для функции $P(r, \theta, \varphi, t)$, получаем выражения (64) – (66):

$$P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] \left(r^{1/2} \exp(-ar) - \frac{R_0}{r^{1/2}} \exp(-aR_0) [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] \right) =$$

$$= \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r), \quad (64)$$

$$P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] \left(r^{1/2} \exp(-ar) - \frac{R_0}{r^{1/2}} \exp(-aR_0) [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] \right) =$$

$$= \cos(\omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r), \quad (65)$$

$$P_{\text{изл}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)] [\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)] \left[\exp(-ar) r^{1/2} - \frac{R_0}{r^{1/2}} \exp(-aR_0) \right] =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=-v}^{+v} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r). \quad (66)$$

Для определения постоянных A_{vn} и B_{vn} в формулах (64) – (66) следует умножить левую и правую их части на произведение $(A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) P_v^n(\theta) j_v(r)$ и, используя свойство ортогональности присоединенных полиномов Лежандра и функций Бесселя с весом $r^{-(v+1/2)}$ [15,16], проинтегри-

ровать полученные выражения по углам θ и φ , используя формулу (61), а левую по соответствующим углам в пределах действия единичных функций. Таким образом, после проведения соответствующих процедур вместо выражений (64) – (66), принимая за $x = \cos(\theta)$ и $x_1 = \cos(\theta_1)$, $x_2 = \cos(\theta_2)$, имеем уравнение (67):

$$\int_0^{2\pi} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi \int_{x_1}^{x_2} P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-ar)}{r^v} j_v(r) dr -$$

$$- \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi \int_{x_1}^{x_2} P_v^n(x) dx R_0 \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-aR_0)}{r^{v+1}} j_v(r) dr =$$

$$= \cos(\omega_c t) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(A_{vn}^2 + B_{vn}^2)}{P_{\text{изл}}} \int_{-1}^1 [P_v^n(x)]^2 dx \int_{R_0}^{\infty} \|j_v\|^2 dr. \quad (67)$$

В полученном выражении интеграл первого сомножителя первого слагаемого в левой части уравнения (67) равен нулю $\left(\int_0^{2\pi} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi = 0 \right)$, интеграл

первого сомножителя второго слагаемого левой части этого уравнения определяется следующей формулой:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi)) d\varphi = \frac{2}{n} \sin[n\Delta\varphi^*] [A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)],$$

а интеграл от квадрата угловой части в правой части формулы (67), определяется соответственно формулой:

$$\int_0^{2\pi} (A_{vn} \cos(n\varphi) + B_{vn} \sin(n\varphi))^2 d\varphi = \pi(A_{vn}^2 + B_{vn}^2),$$

где A_{vn} и B_{vn} – коэффициенты, подлежащие определению, тогда вместо выражений (64) – (66) находим выражения (68) – (70):

$$\begin{aligned} & -[A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)] \int_{x_1}^{x_2} P_v^n(x) dx R_0 \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha R_0)}{r^{v+1}} j_v(r) dr = \\ & = \frac{\cos(\omega_c t)}{2 \sin[n\Delta\varphi^*]} n\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(A_{vn}^2 + B_{vn}^2)}{P_{изл}} \int_{-1}^1 [P_v^n(x)]^2 dx \int_{R_0}^{\infty} \|j_v\|^2 dr, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & [A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)] \left(\int_0^1 P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha r)}{r^v} j_v(r) dr - \int_{x_1}^{x_2} P_v^n(x) dx R_0 \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha R_0)}{r^{v+1}} j_v(r) dr \right) = \\ & = \frac{\cos(\omega_c t)}{2 \sin[n\Delta\varphi^*]} n\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(A_{vn}^2 + B_{vn}^2)}{P_{изл}} \int_{-1}^1 [P_v^n(x)]^2 dx \int_{R_0}^{\infty} \|j_v\|^2 dr, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & [A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)] \int_{x_1}^{x_2} P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \left[\frac{\exp(-\alpha r)}{r^v} - R_0 \frac{\exp(-\alpha R_0)}{r^{v+1}} \right] j_v(r) dr = \\ & = \frac{n\pi}{2 \sin[n\Delta\varphi^*]} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(A_{vn}^2 + B_{vn}^2)}{P_{изл}} \int_{-1}^1 [P_v^n(x)]^2 dx \int_{R_0}^{\infty} \|j_v\|^2 dr. \end{aligned} \quad (70)$$

Из равенства правых частей выражений (68), (69) следует равенство и левых, что дает: $[A_{vn} \cos(n\varphi^*) + B_{vn} \sin(n\varphi^*)] = 0$, поскольку

произведение $\int_0^1 P_v^n(x) dx \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha r)}{r^v} j_v(r) dr \neq 0$,

откуда следует $A_{vn} = -B_{vn} \operatorname{tg}(n\varphi^*)$. Из последнего следует и равенство нулю правой части уравнения (70), т.е. $(A_{vn}^2 + B_{vn}^2) = 0$. Действительно, $B_{vn}^2 (1 + \operatorname{tg}^2(\varphi^*)) = 0$, откуда и следует,

что $A_{vn} = B_{vn} = 0$. Таким образом, пришли к ранее полученному результату, т.е. радиальное распределение ультразвукового излучения будет иметь аналогичный характер, что и в выражении (42), но угловая часть будет определяться произведением единичных функций $[\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)][\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)]$, что и будет отличать полученное решение от предыдущего выражением (71):

$$P(r, \theta, \varphi, t) = P_{изл} R_0 \frac{\exp(-\alpha r)}{r} [\eta(\varphi - \varphi_1) - \eta(\varphi - \varphi_2)][\eta(\theta - \theta_1) - \eta(\theta - \theta_2)]. \quad (71)$$

Заключение

Анализ представленных решений задачи прохождения ультразвукового излучения в глубоководных акваториях показал, что конечный результат не противоречит экспери-

менты, позволяющие обеспечить наиболее надежную связь оператора с ПДК, что, в конечном итоге, позволит оперативно решать задачи радиационного контроля донных отложений. Кроме того, вы-

ментальным методам определения характера рассматриваемой задачи, приведенной в работе [9]. Полученная зависимость $P(\omega_{изл})$ позволяет предварительно выбрать диапазон частот, которые целесообразно использовать для решения проблем, связанных с переносом информации в глубоководных акваториях: сформулировать требования к основным параметрам ультразвуковых датчиков, такие как выбор длины, диаметра, веса детектора; диаграммы направленности, мощности излучения и т.д., т.е. выбрать ультразвуковые

бор ультразвуковых детекторов, обладающих такими свойствами, даст возможность разработать звуковой способ связи в условиях глубоководных акваторий, что сыграет значительную роль при решении проблем передачи информации для специалистов, но, очевидно, приведет к необходимости как разработки специального программного обеспечения, так и создания особого языка при передаче информации в силу ограниченности частотного диапазона, используемого человек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Пыркков И.В., Коротков А.С., Тихонов И.И. Разработка и апробация метода радиационного контроля донных отложений IN STU на основе погружного полупроводникового гамма-спектрометра. *Экологические системы и приборы*. 2010;9:15–18. Режим доступа: <http://eco.tgizd.ru/ru/arhiv/620> (дата обращения: 10.03.2024).

Pyrkov I.V., Korotkov A.S., Tikhonov I.I. Development and testing of the method of radiation-monitoring of bed slit IN STU-established on the basis of an immersible semiconducting γ -spectrometer. *Ecological systems and devices*. 2010;9:15–18. (In Russ.). Available at: <http://eco.tgizd.ru/ru/arhiv/620> (accessed: 10.03.2024).

2. Pavel P. Povineca, Iolanda Osvatha, Jean-François Comanducci. Underwater gamma-ray spectrometry. *Radioactivity in the environment*. 2008;11:449–479. [https://doi.org/10.1016/S1569-4860\(07\)11014-7](https://doi.org/10.1016/S1569-4860(07)11014-7)

3. Елохин А.П. Методы и средства систем радиационного контроля окружающей среды. Монография. Москва: НИЯУ МИФИ, 2014. 520 с. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=vcmnbp> (дата обращения: 10.03.2024).

Elokhin A.P. Methods and means of environmental radiation control systems. Monografia. Moscow: NRU MEPhI, 2014. 520 p. (In Russ.). Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=vcmnbp> (accessed: 10.03.2024).

4. Елохин А.П., Ксенофонтов А.И., Пыркков И.В. Основы экологии и радиационно-экологического контроля окружающей среды. Москва: НИЯУ МИФИ, 2018. 680 с. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=ysaddx> (дата обращения: 10.03.2024).

Elokhin A.P., Ksenofontov A.I., Pyrkov I.V. Fundamentals of ecology and radiation and environmental control. Moscow: NRU MEPhI, 2018. 680 p. (In Russ.). Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=ysaddx> (accessed: 10.03.2024).

5. Елохин А.П., Василенко А.А., Улин С.Е., Юксеклер С., Юксеклер М. Исследование системы автоматизированного управления подводного дозиметрического комплекса при дистанционном измерении придонной радиоактивности в глубоководных акваториях. *Глобальная ядерная безопасность*. 2020;3:18–39. Режим доступа: <https://doi.org/10.26583/GNS-2020-03-02>

Elokhin A.P., Vasilenko A.A., Ulin S.E., Yuksekler S., Yuksekler M. Investigation of the automated control system of an underwater dosimetric complex for remote measurement of bottom-level radioactivity in deep-water areas. *Global nuclear safety*. 2020;3:18–39. (In Russ.). Available at: <https://doi.org/10.26583/GNS-2020-03-02>

6. Елохин А.П., Улин С.Е. Способ и система получения данных придонной радиоактивности в глубоководных акваториях. Патент на Изобретение №2739136. Приоритет от 08.06.2020. Бюл. №36 от 21.12.20. Режим доступа: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0002739136_20201221_C1_RU/ (дата обращения: 10.03.2024).

Elokhin A.P., Ulin S.E. Method and system for obtaining data on bottom radioactivity in deep-water areas. Patent for Invention No. 2739136. Priority dated 06/08/2020. Byul. No. 36 dated 21.12.20. (In Russ.). Available at: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0002739136_20201221_C1_RU/ (accessed: 10.03.2024).

7. Елохин А.П., Улин С.Е., Василенко А.А. Метод определения и передачи данных радиоактивного загрязнения донной поверхности в глубоководных акваториях. *Атомная энергия*. 2021;130(6):338–344. Режим доступа: <https://www.j-atomicenergy.ru/index.php/ae/article/view/4437> (дата обращения: 10.03.2024).

8. Elokhin A.P., Ulin S.E., Vasilenko A.A. Method for determining and transmitting data on radioactive contamination of the sea-bottom in deep-water areas. *Atomic energy*. 2021;130:360–366. <https://doi.org/10.1007/s10512-022-00824-0>

9. Лепендин Л.Ф. Акустика. Москва: Высшая школа, 1978. 448 с. Режим доступа: <https://alexandr4784.narod.ru/lependin.html> (дата обращения: 10.03.2024).

Lependin L.F. Acoustics. Moscow: Higher School. 1978, 448 p. (In Russ.). Available at: <https://alexandr4784.narod.ru/lependin.html> (accessed: 10.03.2024).

10. Деев М.Г. Мировой океан: основные параметры морской воды. *География*. 2009;20:7–12. Режим доступа: https://geo.1sept.ru/view_article.php?ID=200902003 (дата обращения: 10.03.2024).

Deev M.G. World Ocean: basic parameters of sea water. *Geography*. (In Russ.). Available at: https://geo.1sept.ru/view_article.php?ID=200902003 (accessed: 10.03.2024).

11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III, ч 2. Москва: Наука, 1974. 672 с. Режим доступа: <https://djvu.online/file/DLsGTR1sYqKaR?ysclid=lyo4umrlcm9131925> (дата обращения: 10.03.2024).

Smirnov V.I. Course of higher mathematics. Volume III, part two. Moscow: Nauka, 1974. 672 p. (In Russ.). Available at: <https://djvu.online/file/DLsGTR1sYqKaR?ysclid=lyo4umrlcm9131925> (accessed: 10.03.2024).

12. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стигана. Москва: Наука, 1979. 832 с. Режим доступа: <https://archive.org/details/B-001-038-574-ALL/B-001-038-574-06/page/444/mode/2up> (дата обращения: 10.03.2024).

A guide to special functions. Edited by M. Abramovitz and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. 832 p. (In Russ.). Available at: <https://archive.org/details/B-001-038-574-ALL/B-001-038-574-06/page/444/mode/2up> (accessed: 10.03.2024).

13. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 444 с. Режим доступа: <https://djvu.online/file/jym6J9VmkcRfQ?ysclid=lyo58vfj3928834074> (дата обращения: 10.03.2024).

Sobolev S.L. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966. 444 p. (In Russ.). Available at: <https://djvu.online/file/jym6J9VmkcRfQ?ysclid=lyo58vfj3928834074> (accessed: 10.03.2024).

14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Москва: Наука, 1986. 800 с. Режим доступа: <https://djvu.online/file/SAOumBJKxiLEt?ysclid=lyo5h9ts1b966588688> (дата обращения: 10.03.2024).

Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. Additional chapters. Moscow: Nauka, 1986. 800p. (In Russ.). Available at: <https://djvu.online/file/SAOumBJKxiLEt?ysclid=lyo5h9ts1b966588688> (accessed: 10.03.2024).

15. Дегтярев А.Н. Дополнительные свойства специальных функций. Севастопольский национальный технический университет. Прикладная математика. 2006. С. 1–10. Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/document?id=283503> (дата обращения: 10.03.2024).

Degtyarev A.N. Additional properties of special functions. Sevastopol National Technical University. Applied mathematics. 2006. P. 1–10. (In Russ.). Available at: <https://znanium.ru/catalog/document?id=283503> (accessed: 10.03.2024).

16. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. 72 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/43459?ysclid=lyo5ux8jl918829395> (дата обращения: 10.03.2024).

Kholodova S.E., Peregudin S.I. Special functions in problems of mathematical physics. – St. Petersburg: ITMO Research Institute, 2012. 72 p. (In Russ.). Available at: <https://e.lanbook.com/book/43459?ysclid=lyo5ux8jl918829395> (accessed: 10.03.2024).

17. Жданкин В.К. Ультразвуковые датчики для систем управления. *Современные технологии автоматизации*. 2002(3):46–47. Режим доступа: <https://www.cta.ru/articles/cta/obzory/apparatnye-sredstva/125352/> (дата обращения: 10.03.2024).

Zhdankin V.K. Ultrasonic sensors for control systems. Modern technologies of automation. 2002.(3):46–47. (In Russ.). Available at: <https://www.cta.ru/articles/cta/obzory/apparatnye-sredstva/125352/> (accessed: 10.03.2024).

ВКЛАД АВТОРОВ:

Елохин А.П. – написание статьи, математическая реализация решения задачи, участие в проведении эксперимента;

Улин С.Е. – постановка задачи, редактирование текста и участие в проведении эксперимента;

Шустов А.Е. – проведение эксперимента;

Свешников Н.М. – анализ технологий ультразвуковых детекторов и выбор наиболее оптимальных образцов для рассматриваемых задач.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ:

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ:

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ:

Александр Прокопьевич Елохин, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», член-корреспондент РАН, г. Москва, Российская Федерация.

<http://orcid.org/0000-0002-7682-8504>

WoS ResearcherID: F-9573-2017

e-mail: elokhin@yandex.ru

Сергей Евгеньевич Улин, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация.

<https://orcid.org/0000-0001-6737-7070>

e-mail: seulin@gmail.com

Александр Евгеньевич Шустов, старший преподаватель, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация.

<https://orcid.org/0000-0001-9795-3753>

e-mail: aeshustov@mephi.ru

Свешников Никита Максимович, аспирант, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация.

e-mail: NMSveshnikov@mephi.ru

AUTHORS' CONTRIBUTION:

Elokhin A.P. – writing a paper, mathematical implementation of the problem solution, participation in the experiment;

Ulin S.E. – setting the problem, editing the text, and participating in the experiment;

Shustov A.E. – conducting an experiment.

Sveshnikov N.M. – analysis of ultrasonic detector technologies and selection of the most optimal samples for the considered tasks.

FUNDING:

The authors state that there are no sources of funding.

CONFLICT OF INTEREST:

No conflict of interest.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

Alexander P. Elokhin, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Associate Member of Russian Academy of Natural Sciences, National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russian Federation.

<http://orcid.org/0000-0002-7682-8504>

WoS ResearcherID: F-9573-2017

e-mail: elokhin@yandex.ru

Sergey E. Ulin, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russian Federation.

<https://orcid.org/0000-0001-6737-7070>

e-mail: seulin@gmail.com

Alexander E. Shustov, Senior Lecturer, National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russian Federation.

<https://orcid.org/0000-0001-9795-3753>

e-mail: aeshustov@mephi.ru

Sveshnikov Nikita M., postgraduate student, National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russian Federation.

e-mail: NMSveshnikov@mephi.ru

Поступила в редакцию 12.03.2024

После доработки 25.07.2024

Принята к публикации 30.07.2024

Received 12.03.2024

Revision 25.07.2024

Accepted 30.07.2024