

ЭКСПЛУАТАЦИЯ ОБЪЕКТОВ
АТОМНОЙ ОТРАСЛИ
OPERATION OF FACILITIES
NUCLEAR INDUSTRY

<https://doi.org/10.26583/gns-2026-03-06>

УДК 517.958:532.5

EDN RPUJYC

Оригинальная статья / Original paper



Разработка математической модели колебаний жидкости с учетом
релаксационных явлений

А.В. Губинский¹, К.В. Трубицын²  , В.А. Кудинов¹

¹ Самарский государственный институт культуры, г. Самара, Российская Федерация

² Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация

 Trubitsyn.KV@samgtu.ru

Резюме. Разработана математическая модель колебаний жидкости при последовательном подводном выделении большого количества энергии от нескольких расположенных в одной точке источников, приводящих к образованию сильно нагретого газа (плазмы) с очень высоким давлением. Периодическое расширение газа приводит к возникновению волнового колебательного процесса в жидкости, что, в свою очередь, оказывает механическое воздействие на расположенные на некотором расстоянии от источников энергии тела (преграды). Вывод модели основан на использовании модифицированной формулы закона Гука и второго закона Ньютона. Отрезки времени, разделяющие процессы выделения энергии, принимаются такими, чтобы их частота совпадала с частотой собственных колебаний. При этом наступают резонансные колебания. Их амплитуда ограничивается внутренним трением в жидкости. Если частоты источников незначительно отличаются от частоты собственных колебаний, возникают бифуркационно-флаттерные колебания, с периодическим возрастанием амплитуды от некоторого ее максимального значения до минимального. Применение модифицированной формулы закона Гука при выводе определяющего волнового дифференциального уравнения позволяет учесть длину и время свободного пробега микрочастиц (молекул, атомов и др.). Результаты работы могут быть использованы в энергетике, нефтяной и атомной промышленности для очистки внутренних поверхностей теплообменников, а также магистральных трубопроводов от различного рода отложений.

Ключевые слова: подводное выделение энергии, математическая модель, резонансные колебания, бифуркационно-флаттерные колебания, время релаксации, численные исследования, метод разделения переменных, закон Гука, аналитическое решение, задача Штурма – Лиувилля

Для цитирования: Губинский А.В., Трубицын К.В., Кудинов В.А. Разработка математической модели колебаний жидкости с учетом релаксационных явлений. *Глобальная ядерная безопасность*. 2026;16(3):60-70. <https://doi.org/10.26583/gns-2026-03-06>

For citation: Gubinsky A.V., Trubitsyn K.V., Kudinov V.A. Development of a mathematical model of fluid oscillations taking into account relaxation phenomena. *Nuclear Safety*. 2026;16(3):60-70. (In Russ.). <https://doi.org/10.26583/gns-2026-03-06>

Development of a mathematical model of fluid oscillations taking into account relaxation
phenomena

Alexey V. Gubinskiy², Konstantin V. Trubitsyn¹  , Vasily A. Kudinov¹

¹ Samara State Institute of Culture, Samara, Russian Federation

² Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

 Trubitsyn.KV@samgtu.ru

Abstract. A mathematical model is developed for fluid oscillations during the sequential underwater release of a large amount of energy from several sources located at a single point, resulting in the formation of a highly heated gas (plasma) with very high pressure. The periodic expansion of the gas triggers a wave oscillation process in the fluid,

which, in turn, exerts a mechanical force on objects (obstacles) located at some distance from the energy sources. The model is derived using a modified formula for Hooke's law and Newton's second law. The time intervals separating the energy release processes are chosen such that their frequency coincides with the natural oscillation frequency. Their amplitude is limited by internal friction within the fluid. If the source frequencies differ slightly from the natural oscillation frequency, bifurcation-flutter oscillations occur, with a periodic increase in amplitude from a certain maximum to a minimum value. Using a modified formula of Hooke's law in deriving the governing wave differential equation allows for the length and free time of microparticles (molecules, atoms, etc.) to be taken into account. The results of this work can be used in the energy, oil and nuclear industries to clean the internal surfaces of heat exchangers, as well as main pipelines from various types of deposits.

Keywords: underwater energy release, mathematical model, resonant oscillations, bifurcation-flutter oscillations, relaxation time, numerical studies, method of separation of variables, Hooke's law, analytical solution, Sturm-Liouville problem

Введение

Инициирование подводного выделения энергии находит применение в различных отраслях промышленности (сейсморазведка подводных районов земной поверхности, проведение дноуглубительных работ, анализ искусственных и естественных цунами и проч.). Большое внимание уделяется проблеме улучшения характеристик энергоемкости источников энергии с целью увеличения воздействия на окружающие конструкции.

Различают контактное, близкое неконтактное и неконтактное воздействие источников энергии на преграду. При контактном воздействии на преграду действует высокочастотное импульсное колебание газов, что объясняется близостью объекта и источника колебаний. При этом получается малая по площади и большая по глубине зона воздействия. При близком неконтактном воздействии силовое поле характеризуется действием высокочастотного колебания жидкости (до момента времени достижения преграды расширяющимся газовым пузырем); высокочастотного колебания газа (при достижении преграды расширяющимся газовым пузырем). При неконтактном воздействии на преграду, расположенную за пределами расширения газового пузыря, эффект воздействия обусловлен импульсными колебаниями жидкости, частота которых зависит от расстояния до объекта. Эффект воздействия может быть значительно увеличен, если применить серию процессов выделения энергии с частотой инициирования, близкой или совпадающей с частотой собственных колебаний жидкости. Следовательно, часто-

та инициирования зависит от расстояния до объекта [1].

В энергетике, нефтяной и атомной промышленности большой проблемой является появление различного рода отложений на внутренних поверхностях теплообменников, магистральных трубопроводов. Их очистка без вскрытия трубопроводов является сложной технической проблемой. Ее возможным решением является создание бифуркационно-флаттерных колебаний, иницируемых непосредственно в процессе их работы.

Разработка математической модели

В настоящей работе представлена математическая модель, описывающая колебания в жидкости с учетом релаксационных свойств и трения. Вывод модели базируется на формуле закона Гука и втором законе Ньютона. По закону Гука имеем (1) [2]:

$$p = \rho_0 e^2 \varepsilon, \quad (1)$$

где $p_{из}$ – избыточное давление; $\varepsilon = dU/dx$ – деформация; U – перемещение; x – координата; ρ_0 – плотность в ненапряженном состоянии; $e^2 = \partial p / \partial \rho$ – скорость волны.

Второй закон Ньютона может быть представлен в виде (2):

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 U}{dt^2} = \rho_0 S \Delta x \frac{d^2 U}{dt^2}, \quad (2)$$

где F – сила; m – масса; $a = dv/dt$ – ускорение; $v = dU/dt$ – скорость; S – площадь сечения; Δx – длина элементарного участка.

Сила на участке Δx (3):

$$F = S \Delta x dp/dx. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), находим (4):

$$\rho_0 S \Delta x \frac{d^2 U}{dt^2} = S \Delta x \frac{dp}{dx}. \quad (4)$$

Подставив (1) в (4), имеем (5):

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) является классическим волновым уравнением без учета внутреннего трения. Для его учета примем (6):

$$F_c = l \partial U / \partial t, \quad (6)$$

где l – коэффициент, кг/с; F_c – сила сопротивления.

Подставляя (6) в (4), имеем (7):

$$\rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + l \frac{\partial U}{\partial t} = S \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7)$$

С учетом (1) находим (8):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{l}{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8)$$

где $\Delta V = S \Delta x$.

Подставим (1) в (8) и получаем (9):

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = e^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где $\sigma = l / (\rho_0 \Delta V)$.

Уравнение (9) описывает затухающие колебания с учетом трения. При его выводе используется закон Гука (1), в котором деформация и давление не связаны во времени. Поэтому изменение деформации приводит к мгновенному изменению давления. Однако в реальных процессах возмущения передаются с запаздыванием, учитываемым коэффициентами релаксации [3-6]. Для его учета представим формулу (1) в виде (10):

$$p + \tau_1 \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 e^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right), \quad (10)$$

где τ_1 , τ_2 – времена релаксации, физический смысл которых – учет длины и времени свободного пробега микрочастиц.

Выражая p из формулы (10) и подставляя в (8), имеем (11):

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{l}{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial t} = \\ = \rho_0 e^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя $\partial p / \partial x$ из (8) в (11), находим

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \eta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial U}{\partial t} = e^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right),$$

где $\eta = 1 + \tau_1 \sigma$ – безразмерный комплекс. Пренебрегая величиной $\tau_1 \sigma$, ввиду ее малости, последнее соотношение будет таким (12):

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial U}{\partial t} = \\ = e^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) является гиперболическим, учитывающим релаксационные свойства жидкости и внутреннее трение. При $\tau_1 = \tau_2 = \sigma = 0$ уравнение (12) приводится к уравнению (5).

Рассмотрим колебания жидкости в канале, один конец которого закрыт ($x = \delta$), а второй – открыт ($x = 0$). Начальное перемещение линейно изменяется по координате. Математическая постановка задачи включает уравнение (12) и краевые условия (13) – (17):

$$U(x,0) = b(\delta - x); \quad (13)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,0)}{\partial t^2} = 0; \quad (15)$$

$$\partial U(0,t) / \partial x = 0; \quad (16)$$

$$U(\delta,t) = 0, \quad (17)$$

где δ – расстояние до преграды, b – коэффициент.

В случае, когда давление p при $x = 0$ изменяется по гармоническому закону, условие (16) имеет вид (18):

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = A_1 \cos(\omega t), \quad (18)$$

где A_1 – безразмерная амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, рад/с; ν – частота вынужденных колебаний, 1/с.

Для приведения задачи (12) – (17) к безразмерному виду обозначим (19):

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{U}{U_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{et}{\delta}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \\ \text{Fo}_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad \text{Fo}_3 = \frac{\delta\sigma}{e}; \quad U_0 = b\delta, \end{aligned} \quad (19)$$

где Θ , ξ , Fo , Fo_1 , Fo_2 – безразмерные перемещение, координата, время, времена релаксации; Fo_3 – безразмерный коэффициент трения; $U_0 = b\delta$.

Задача (12) – (17) принимает вид (20) – (25):

$$Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} + Fo_3 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (20)$$

$$(Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad \Theta(\xi, 0) = (1 - \xi); \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \right|_{Fo=0} = 0; \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} \right|_{Fo=0} = 0; \quad (23)$$

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi|_{\xi=0} = 0; \quad (24)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0. \quad (25)$$

Граничное условие (18) в безразмерном виде будет (26):

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = A_3 \cos(A_2 Fo), \quad (26)$$

где $A_2 = 2\pi\nu\delta / e$ – безразмерная частота колебаний; $A_3 = \delta A_1 / u_0$ – безразмерная амплитуда колебаний.

Уравнение (20) отличается от уравнения (9) двумя слагаемыми, учитывающими инерционность изменения давления.

Решение задачи представим в виде (27):

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi), \quad (27)$$

где $\varphi_k(Fo)$ – функция времени;

$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$, $(r = 2k - 1)$.

Подставим (27) в (20) и получим (28):

$$\frac{Fo_3 \varphi' + \varphi'' + Fo_1 \varphi'''}{\varphi + Fo_2 \varphi'} = \frac{\psi''}{\psi} = -v, \quad (28)$$

где $\varphi' = d\varphi/dFo$; $\varphi'' = d^2\varphi/dFo^2$;

$\varphi''' = d^3\varphi/dFo^3$; $\psi'' = d^2\psi/d\xi^2$;

v – постоянная.

Из (28) находим (29) – (33):

$$Fo_1 \varphi''' + \varphi'' + (Fo_3 + vFo_2) \varphi' + v\varphi = 0; \quad (29)$$

$$\psi'' + v\psi = 0. \quad (30)$$

Подставим (27) в (24), (25):

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad (31)$$

$$\psi(1) = 0. \quad (32)$$

Задача (30) – (32) имеет решение (33):

$$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2), \quad (r = 2k-1; k = 1, 2, 3 \dots). \quad (33)$$

Формула (33) удовлетворяет (31), (32). Подставив (33) в (30), для собственных чисел имеем соотношение (34):

$$v_k = r^2 \pi^2 / 4, \quad (r = 2k - 1; k = 1, 2, \dots). \quad (34)$$

Из (33) находятся собственные функции.

Характеристическое уравнение для (29) выглядит как (35):

$$Fo_1 z^3 + z^2 + (Fo_3 + v_k Fo_2) z + v_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (35)$$

Его корни (36) – (38):

$$z_{1k} = \gamma + i\beta; \quad (36)$$

$$z_{2k} = \gamma - i\beta; \quad (37)$$

$$z_{3k} = (A/2 - 2B/A - 1)/(3Fo_1), \quad (38)$$

где $\gamma = (B/A - A/4 - 1)/(3Fo_1)$;

$\beta = \sqrt{3}(A/2 + 2B/A - 1)/(6Fo_1)$;

$i = \sqrt{-1}$;

$A = \{36Fo_1(v_k Fo_2 + Fo_3) - 108v_k Fo_1^2 - 8 +$

$+ 12\sqrt{3}[2v_k m_1(2v_k^2 Fo_2^2 + 6v_k m_2 + 6Fo_3^2 -$

$- 9v_k) - v_k Fo_2(v_k Fo_2 + 2Fo_3) +$

$+ 2m_3(2Fo_3^2 - 9v_k) - Fo_3^2 + 27v_k Fo_1^2 + 4v_k]^{1/2} Fo_1\}^{1/3}$;

$B = 3Fo_1(v_k Fo_2 + Fo_3) - 1$; $m_1 = Fo_1 Fo_2$;

$m_2 = Fo_2 Fo_3$; $m_3 = Fo_1 Fo_3$.

Для уравнения (29) имеем частные решения (39):

$$\varphi_1 = \exp(\gamma + i\beta)Fo; \quad (39)$$

$$\varphi_2 = \exp(\gamma + i\beta)Fo;$$

$$\varphi_3 = \exp(z_{3k} Fo).$$

Его общее решение (40):

$$\varphi_k(\text{Fo}) = C_{1k} \exp[(\gamma + i\beta)\text{Fo}] + C_{2k} [\exp(\gamma + i\beta)\text{Fo}] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}), \quad (40)$$

где C_{jk} ($j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3 \dots$) – постоянные.

Формулу (40) преобразуем к виду (41):

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo}) [C_{1k} \exp[i\beta\text{Fo}] + C_{2k} \exp(-i\beta\text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}). \quad (41)$$

Применив формулы Эйлера $\exp(is) = \cos s + i \sin s$, $\exp(-is) = \cos s - i \sin s$, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo}) [C_{1k} (\cos(\beta\text{Fo}) + i \sin(\beta\text{Fo})) + C_{2k} (\cos(\beta\text{Fo}) - i \sin(\beta\text{Fo}))] + \\ + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo}) [(C_{1k} + C_{2k}) \cos(\beta\text{Fo}) - i (C_{2k} - C_{1k}) \sin(\beta\text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$; $B_{2k} = i (C_{2k} - C_{1k})$.

Отсюда получаем выражение (42):

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta\text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta\text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}). \quad (42)$$

Формула (27) с учетом (33), (42) будет выражением (43):

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \{ \exp(\gamma\text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta\text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta\text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}) \} \cos(r\pi\xi/2), \quad (43)$$

$$(r = 2k-1; k = 1, 2, 3 \dots).$$

Частные решения (43) удовлетворяют уравнению (20) и условиям (24), (25), но не удовлетворяют условиям (21) – (23). Для их выполнения запишем сумму (44):

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \exp(\gamma\text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta\text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta\text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k}\text{Fo}) \} \cos(r\pi\xi/2), \quad (44)$$

$$(r = 2k-1; k = 1, 2, 3 \dots),$$

где B_{1k} , B_{2k} , C_{3k} определяются из (21)–(23).

Подставив (44) в (23), имеем (45):

$$B_{1k} = (B_{2k}\beta - C_{3k}z_{3k})/\gamma. \quad (45)$$

Подставив (44) в (22), находим (46):

$$B_{2k} = [(\gamma^2 - \beta^2)B_{1k} + C_{3k}z_{3k}^2]/(2\gamma\beta). \quad (46)$$

Подставив (44) в (21), получаем (47):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{1k} + C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) = (1 - \xi); \quad (47)$$

$$(r = 2k - 1).$$

Умножим (47) на $\cos(j\pi\xi/2)$ и найдем интеграл (48):

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (B_{1k} + C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi; \quad (j = r = 2k - 1). \quad (48)$$

Учитывая ортогональность косинусов имеем (49):

$$\int_0^1 (B_{1k} + C_{3k}) \cos^2\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \cos^2\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) d\xi \quad (49)$$

Отсюда находим (50):

$$C_{3k} = - \frac{[(D + r^2\pi^2)B_{1k} + 8\cos(0,5r\pi) - 8]}{(D + r^2\pi^2)}; \quad (50)$$

$$(r = 2k-1; k = 1, 2, 3 \dots),$$

где $D = 2r\pi\cos(0,5r\pi)\sin(0,5r\pi)$.

Определив постоянные B_{1k} , B_{2k} и C_{3k} , решение задачи (20) – (25) находится из (44). При $Fo_1 = Fo_2 = 0$ и $Fo_3 \neq 0$ уравнение (35) будет (51):

$$z^2 + Fo_3 z + v_k = 0; (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (51)$$

Уравнение (51) имеет корни (52):

$$z_{1k, 2k} = -0,5Fo_3 \pm 0,5\sqrt{Fo_3^2 - 4v_k}; \quad (52)$$

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos(r\pi\xi/2), (r = 2k - 1; k = 1, 2, 3 \dots). \quad (54)$$

Константы C_{1k} и C_{2k} находятся из (21) и (22), выражение (55):

$$C_{1k} = \frac{8[\cos(0,5r\pi) - 1]}{r\pi(z_{2k} - z_{1k})(2E_1 + r\pi)};$$

$$C_{2k} = C_{1k} z_{1k} / z_{2k}, \quad (55)$$

где $E_1 = \cos(r\pi/2)\sin(r\pi/2)$.

Формула (54) является точным решением задачи (20) – (25) (при $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 \neq 0$).

Результаты и обсуждение

Проведем анализ результатов решения (44) для различных Fo_1 , Fo_2 и Fo_3 . При $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$ и $Fo_3 = 0$ колебания незатухающие, так как $Fo_3 = 0$.

На рисунках 1-3 приведены расчеты перемещений по (44) при $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0,1$ (рис. 1) и $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 0,5$ (рис. 2); $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 30$ (рис. 3). Из их анализа видно, что увеличение Fo_3 приводит к ускорению затухания колебаний. При больших его величинах ($Fo_3 > 5$) колебания отсутствуют (рис. 3).

($k = 1, 2, 3 \dots$).

Решение уравнения (29) принимает вид (53):

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo), \quad (53)$$

где C_{1k} и C_{2k} – постоянные.

Подставив (33), (53) в (27), составим сумму (54):

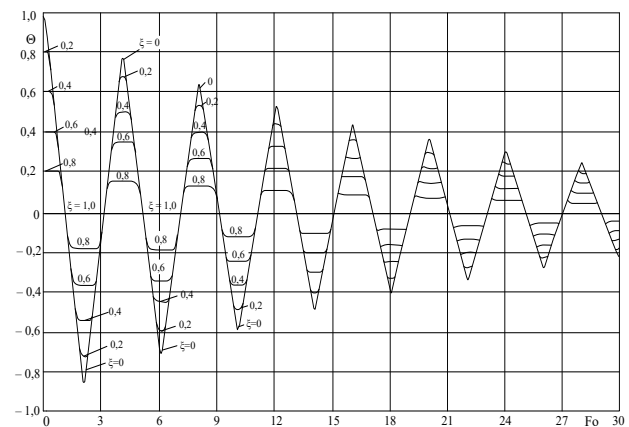


Рисунок 1. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0,1$;
 $n = 100$ – число членов ряда (44)

Figure 1. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0,1$;
 $n = 100$ is a number of members of the series (44)

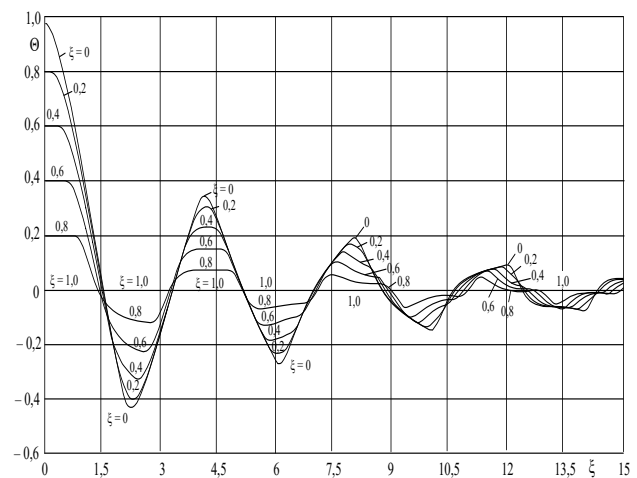


Рисунок 2. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 0,5$;
 $n = 100$ – число слагаемых ряда (44)

Figure 2. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 0,5$;
 $n = 100$ is a number of terms in the series (44)

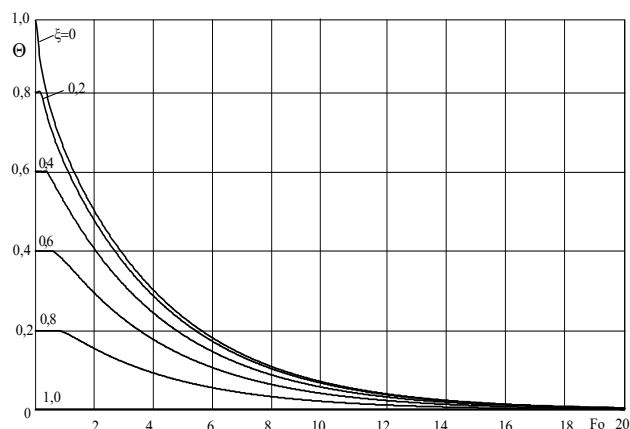


Рисунок 3. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 30$; $n = 100$ – число членов ряда (44)

Figure 3. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 30$; $n = 100$ is a number of members of the series (44)

На графиках рисунков 4 и 5 даны расчеты по формуле (44).

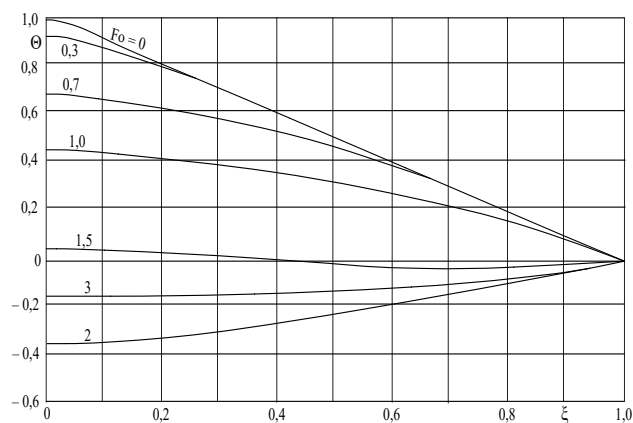


Рисунок 4. Изменение перемещений жидкости в координате ξ (расчет по формуле (44)):

$Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 0$; $n = 100$

Figure 4. Change in fluid displacement in the coordinate ξ (calculated using formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 0$; $n = 100$

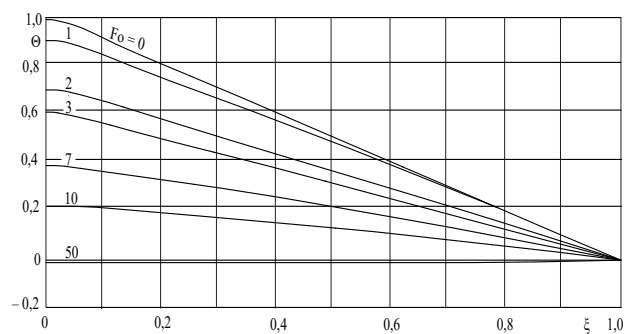


Рисунок 5. Изменение перемещений жидкости в координате ξ (расчет по формуле (44)):

$Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 5$; $n = 100$

Figure 5. Change in fluid displacement in the coordinate ξ (calculated using formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0,1$; $Fo_3 = 5$; $n = 100$

На графиках рисунков 6-8 даны расчеты по формуле (44) при $Fo_1 = Fo_2 = 2$; $Fo_3 = 1$ (рис. 6); $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0$ (рис. 7); $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 20$ (рис. 8). Из их анализа следует, что увеличение Fo_1 и Fo_2 (при $Fo_3 = 0$) приводит к понижению амплитуды колебаний.

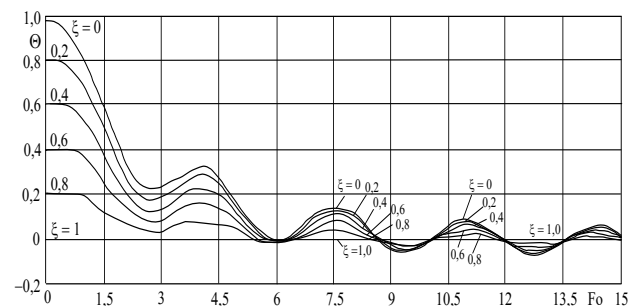


Рисунок 6. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 2$; $Fo_3 = 1$; $n = 100$

Figure 6. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 2$; $Fo_3 = 1$; $n = 100$

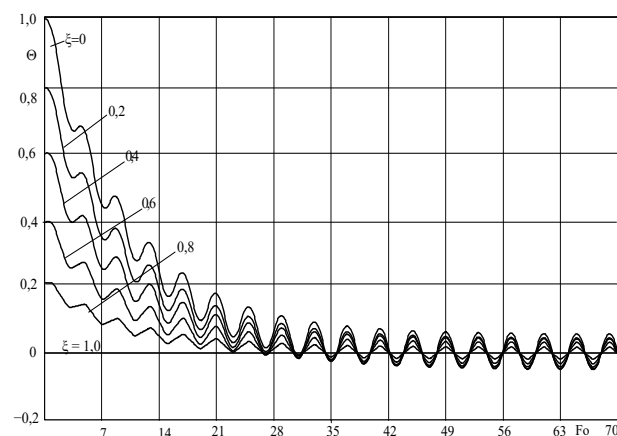


Рисунок 7. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0$; $n = 100$

Figure 7. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0$; $n = 100$

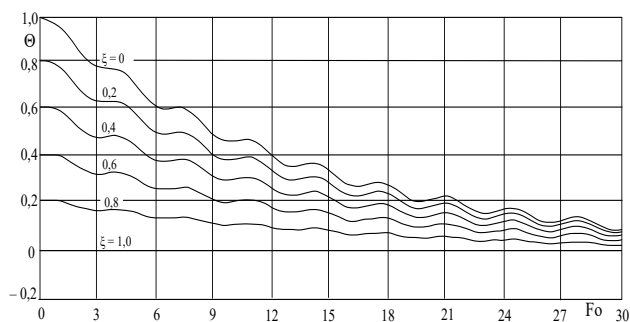


Рисунок 8. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 20$; $n = 100$

Figure 8. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 20$; $n = 100$

На рисунках 9-11 даны расчеты по формуле (54) при $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 1$ (рис. 9); $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 2$ (рис. 10); $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 10$ (рис. 11). Из анализа следует, что при $Fo_3 \neq 0$ колебания затухающие. При больших величинах Fo_3 наблюдается жесткое затухание (рис. 11).

По формулам (44) и (54) можно найти различные варианты колебаний, изменяя Fo_1 , Fo_2 , Fo_3 .

Для расчетов с условием (26) дадим понятие волновых пакетов. Решение для уравнения (5) представим в виде (56)¹

$$u(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \alpha), \quad (56)$$

где A – амплитуда колебаний; ω – круговая частота; $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны; α – фаза волны.

Подставим (56) в (5) и получим (57):

$$\omega = ke. \quad (57)$$

Дисперсионное соотношение (57) позволяет найти фазовую скорость (58):

$$e = \frac{\omega}{k}. \quad (58)$$

При пропорциональном изменении ω и k фазовая скорость неизменна и волна будет недиспергирующей. При непропорциональном их изменении фазовая скорость с изменением частоты будет изменяться, и волна становится диспергирующей, которая не описывается гармонической функцией.

Вид функций зависит от соотношения частот собственных колебаний и колебаний нагрузки. Изменяя частоту нагрузки, имеем волновые пакеты, сформированные путем суммирования колебаний с различными частотами.

Ниже волновые пакеты будут получаться сложением частот собственных колебаний с изменяющейся частотой нагрузки.

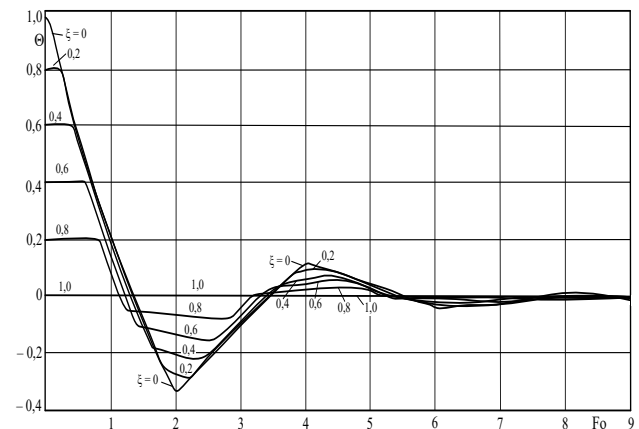


Рисунок 9. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 1$; $n = 100$

Figure 9. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 1$; $n = 100$

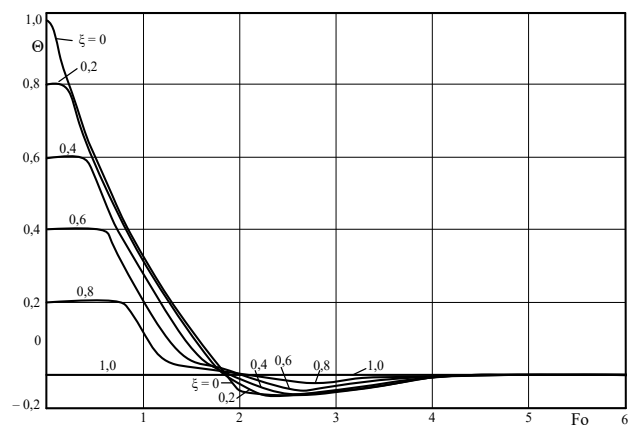


Рисунок 10. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 2$; $n = 100$

Figure 10. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 2$; $n = 100$

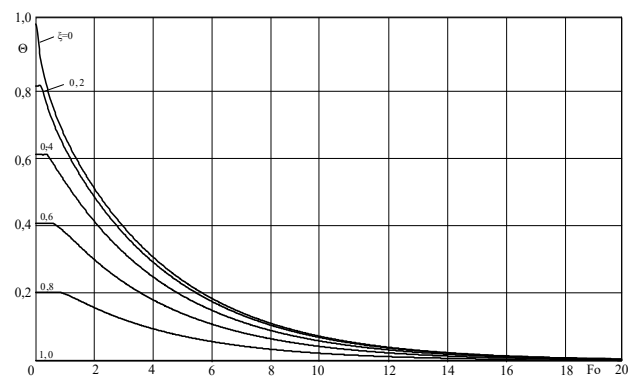


Рисунок 11. Изменение перемещений (по формуле (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 10$; $n = 100$

Figure 11. Change in displacements (according to formula (44)): $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 10$; $n = 100$

¹ Паршаков А.Н. Физика линейных и нелинейных волновых процессов в избранных задачах. Электромагнитные и акустические волны : учебное пособие. Долгопрудный: Интеллект, 2014. 141 с. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_012689787/?ysclid=mrnec9t8tr760561990 (дата обращения: 02.03.2026).

Для формирования таких волновых пакетов в задаче (20)-(25) вместо граничного условия (24) будем использовать условие (26). Аналитическое решение такой задачи затруднительно. При решении методом конечных разностей введем сетку с шагами $\Delta\xi = 0,005$,

$\Delta Fo = 0,005$ по переменным ξ и Fo так, что: $\xi_k = k\Delta\xi$, $k = \overline{0, K}$; $Fo_i = i\Delta Fo$, $i = \overline{0, J}$, где $K = 200$, $J = 50000$ – число шагов по координатам ξ и Fo . Задача в конечных разностях будет выглядеть так (59):

$$Fo_3 \frac{\Theta_k^{i+1} - \Theta_k^i}{\Delta Fo} + Fo_1 \frac{\Theta_k^{i+1} - 3\Theta_k^i + 3\Theta_k^{i-1} - \Theta_k^{i-2}}{\Delta Fo^3} + \frac{\Theta_k^{i-1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i+1}}{\Delta Fo^2} = \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta \xi^2} +$$

$$+ Fo_2 \left(\frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i - \Theta_k^{i-2}}{\Delta \xi^2 \Delta Fo} - \frac{\Theta_{k-1}^{i-1} - 2\Theta_k^{i-1} + \Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta \xi^2 \Delta Fo} \right); \quad (59)$$

$$\Theta_k^0 = 1 - \xi_k; \quad \frac{\Theta_k^1 - \Theta_k^0}{\Delta Fo} = 0; \quad \frac{\Theta_k^0 - 2\Theta_k^1 + \Theta_k^2}{\Delta Fo^2} = 0;$$

$$\frac{\Theta_1^i - \Theta_0^i}{\Delta \xi} = A_3 \cos(A_2 Fo_i); \quad \Theta_k^i = 0.$$

Из анализа расчетов следует, что при $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$ колебания незатухающие. При $Fo_1 = Fo_2 = A_1 = A_2 = 0$ и $Fo_3 = 0,3$ колебания затухающие (рис. 12). При $A_2 = 1,575$ частота источника совпадает с собственной частотой, что приводит к возрастанию амплитуды, ограничиваемой коэффициентом сопротивления Fo_3 (рис. 13). При частотах источников, близких к резонансным ($A_2 = 1,5$), наблюдаются бифуркационно-флаттерные колебания, при которых амплитуда возрастает периодически (рис. 14).

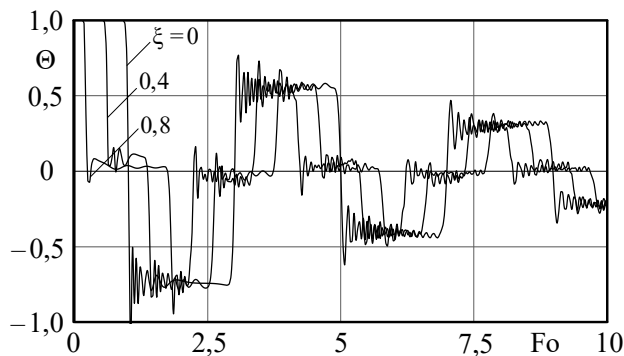


Рисунок 12. Колебания жидкости во времени
($Fo_1 = Fo_2 = A_1 = A_2 = 0$; $Fo_3 = 0,3$)

Figure 12. Fluid oscillations over time
($Fo_1 = Fo_2 = A_1 = A_2 = 0$; $Fo_3 = 0,3$)

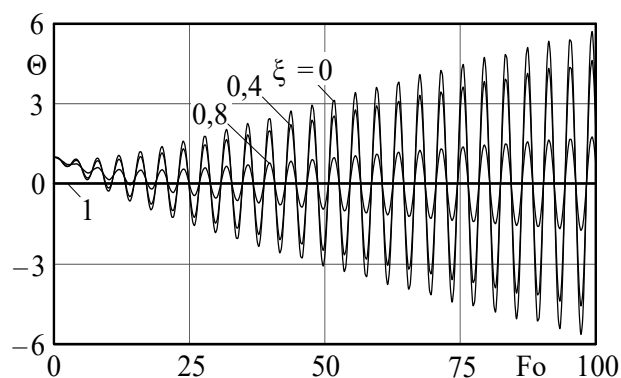


Рисунок 13. Резонансные колебания жидкости во времени ($Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,575$)

Figure 13. Resonant oscillations of a liquid over time
($Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,575$)

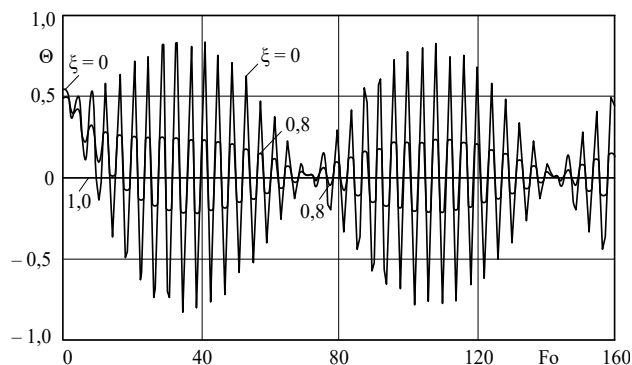


Рисунок 14. Бифуркационно-флаттерные колебания жидкости во времени

($Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,5$)

Figure 14. Bifurcation-flutter oscillations of a fluid over time ($Fo_1 = Fo_2 = 10$; $Fo_3 = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,5$)

Возможное практическое применение полученных результатов связано с двумя факторами:

– достижение высокой амплитуды колебаний при совпадении частоты собственных

колебаний среды и частоты колебаний нагрузки;

– возникновение бифуркационно-флаттерных колебаний при частотах нагрузки, незначительно отличающихся от частоты собственных колебаний среды.

Отметим, что оба эти явления невозможно получить при однократном выделении энергии.

Применение полученных результатов возможно во многих практических случаях. Это, например, разрушение подводных конструкций в каналах, которые препятствуют прохождению надводных и подводных плавающих средств при проведении дноуглубительных работ; при ликвидации ледяных затворов в реках и открытых водных пространствах; при проведении сейсморазведки и анализе естественных цунами. Кроме того, весьма эффективным может быть применение в энергетике, нефтегазовой и атомной промышленности с целью очистки внутренних поверхностей трубопроводов без их вскрытия, путем организации бифуркационно-флаттерных колебаний движущейся среды.

Выводы

1. Разработана математическая модель колебаний жидкости с учетом релаксации и гидравлических сопротивлений. Релаксируя закон Гука, при использовании уравнения энергии выведено уравнение

колебаний жидкости, включающее первую, вторую и третью производные от искомой функции по времени, а также смешанную производную. На основе метода Фурье найдено точное аналитическое решение задачи и выполнен его анализ.

2. Исследование решения показало, что использование релаксационных слагаемых приводит к устранению скачков в изменениях давления. С увеличением коэффициентов релаксации амплитуда колебаний уменьшается, и при больших их значениях колебательный процесс практически отсутствует (жесткое затухание). Жесткое затухание также происходит и при больших величинах Fo_3 .

3. Численные исследования показали, что при одинаковых частотах собственных колебаний и колебаний источников наступает резонанс. Частоты источников, близкие к частоте собственных колебаний, приводят к бифуркационно-флаттерным колебаниям (биениям).

4. Результаты работы могут быть использованы в энергетике, нефтяной и атомной промышленности для удаления различного вида отложений на внутренних поверхностях теплообменников, а также магистральных трубопроводов путем создания бифуркационно-флаттерных колебаний в движущихся средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 435 с. Режим доступа: <https://djvu.online/file/pp1zRV9fLcnbz?ysclid=mrndeq4q4582112757> (дата обращения: 26.02.2026).

Kedrinsky V.K. Hydrodynamics of explosion: experiment and modeling. Novosibirsk: Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2000. 435 p. (In Russ.). Available at: <https://djvu.online/file/pp1zRV9fLcnbz?ysclid=mrndeq4q4582112757> (accessed: 26.02.2026).

2. Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. Москва: КомКнига, 2010. 360 с. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19446374&ysclid=mrne87w4ro741277691> (дата обращения: 26.02.2026).

Kabisov K.S., Kamalov T.F., Lurie V.A. Oscillations and wave processes: theory. Problems with solutions. Moscow: KomKniga, 2010. 360 p. (In Russ.). Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19446374&ysclid=mrne87w4ro741277691> (accessed: 26.02.2026).

3. Кудинов И.В. Разработка математических моделей и исследование неравновесных явлений с учетом пространственно-временной нелокальности. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2018;22 (1):116-152. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1566>

Kudinov I.V. Development of mathematical models and research strongly nonequilibrium developments taking into account space-time nonlocality. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. (in Russ.). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1566>

4. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*. 1997;(167)10:1095-1106. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>

Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Physics-Uspekhi*. 1997;40:1043-1053. [10.1070/PU1997v040n10ABEH000292](https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292)

5. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физических наук*. 1991;161(3):5-29. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199103b.0005>

Sobolev S L Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium. *Sov. Physics Uspekhi*. 1991;34(3)217-229. [10.1070/PU1991v034n03ABEH002348](https://doi.org/10.1070/PU1991v034n03ABEH002348)

6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Монография. Москва: Дрофа, 2003. 840 с. Режим доступа: <https://djuv.online/file/aKKbN2Gb7dd46?ysclid=mrneba6b41761471914> (дата обращения: 02.03.2026).

Loytsyansky L.G. Mechanics of liquids and gases. Monograph. Moscow: Drofa, 2003. 840 p. (In Russ.). Available at: <https://djuv.online/file/aKKbN2Gb7dd46?ysclid=mrneba6b41761471914> (accessed: 02.03.2026).

ВКЛАД АВТОРОВ:

Губинский А.В. – участие в разработке математической модели, численное исследование модели;

Трубицын К.В. – участие в разработке математической модели, численное исследование модели, редактирование текста;

Кудинов В.А. – постановка задачи, редактирование текста.

AUTHORS' CONTRIBUTION:

Gubinskiy A.V. – participation in the development of a mathematical model, numerical study of the model;

Trubitsyn K.V. – participation in the development of a mathematical model, numerical study of the model, text editing;

Kudinov V.A. – setting the task, text editing.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ:

Работа выполнена без привлечения внешних источников финансирования.

FUNDING:

The work was carried out without external funding.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ:

Конфликт интересов отсутствует.

CONFLICT OF INTEREST:

No conflict of interest.

Алексей Владимирович Губинский, специалист гражданской обороны, Самарский государственный институт культуры, г. Самара, Российская Федерация. e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ:

Константин Викторович Трубицын, кандидат экономических наук, доцент, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация. <https://orcid.org/0000-0003-1888-2905>

e-mail: trubitsyn.kv@samgtu.ru

Василий Александрович Кудинов, доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация. e-mail: totig@yandex.ru

Alexey V. Gubinskiy, Civil Defense specialist, Samara State Institute of Culture, Samara, Russian Federation. e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

Konstantin V. Trubitsyn, Cand. Sci. (Econ.), Associate Professor, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation.

<https://orcid.org/0000-0003-1888-2905>

e-mail: trubitsyn.kv@samgtu.ru

Vasily A. Kudinov, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation.

e-mail: totig@yandex.ru

Поступила в редакцию / Received 15.12.2025

После доработки / Revision 28.07.2026

Принята к публикации / Accepted 30.07.2026